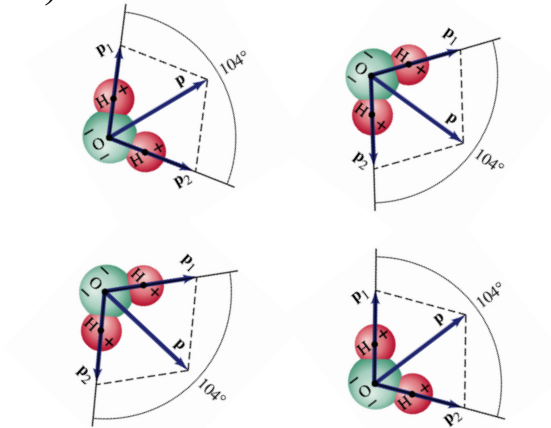


Semaine 6:
Electrostatique 2

Matériaux «diélectriques»

Matériaux «diélectriques»:

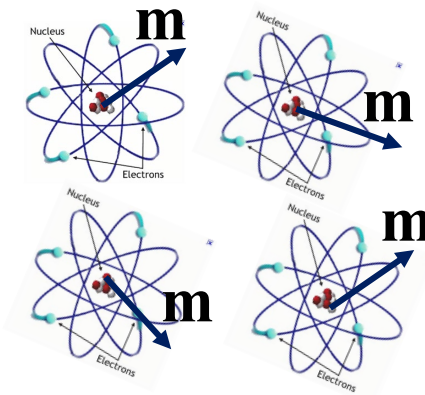
composés de **dipôles électriques** microscopiques
(induits par $\mathbf{E}$ ou permanents)



Dimensions
d'un atome ou
d'une molécule

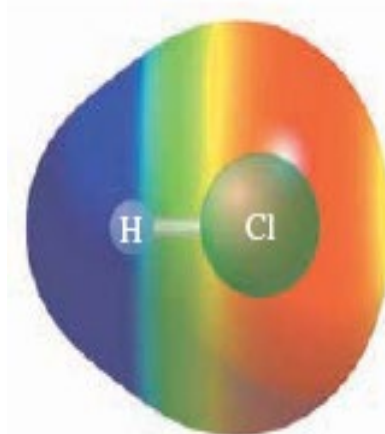
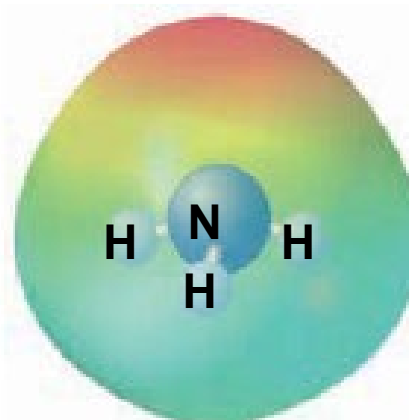
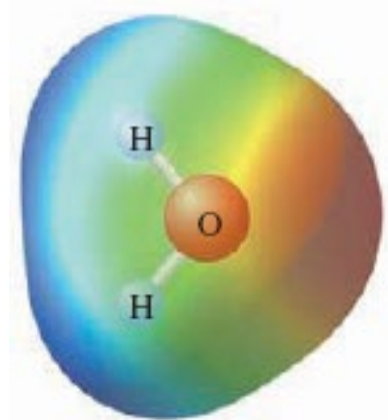
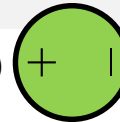
Matériaux «magnétiques»:

composés de **dipôles magnétiques** microscopiques
(induits par $\mathbf{B}$ ou permanents)

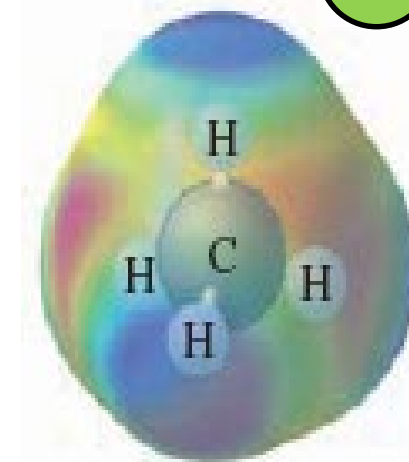
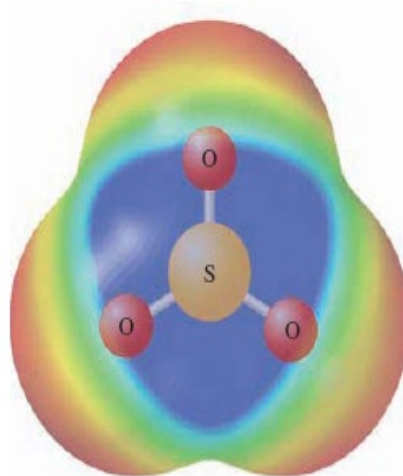
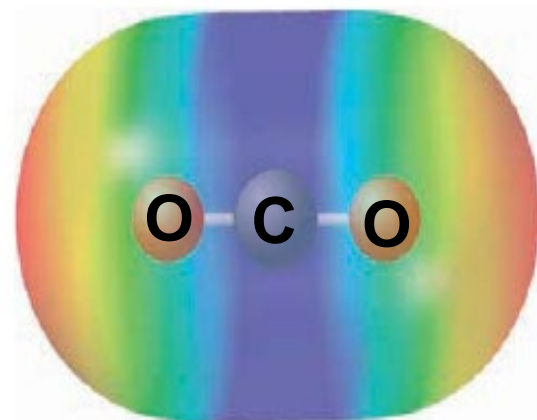


Molecule polaire et molecule apolaire

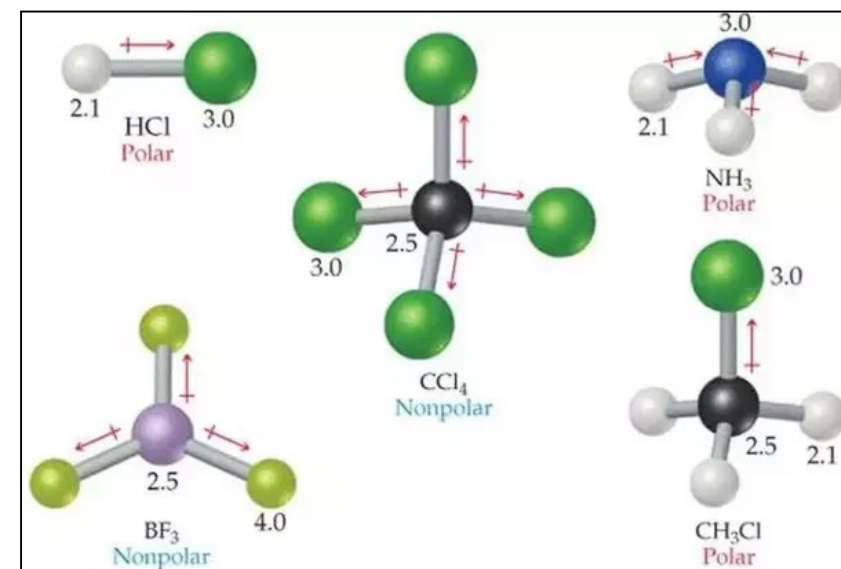
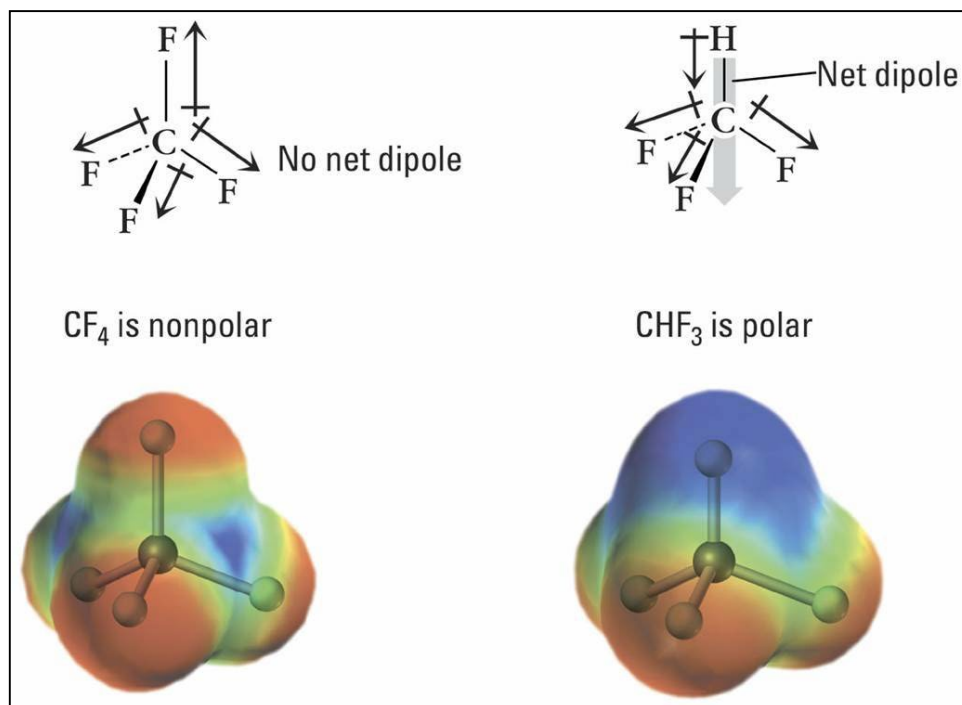
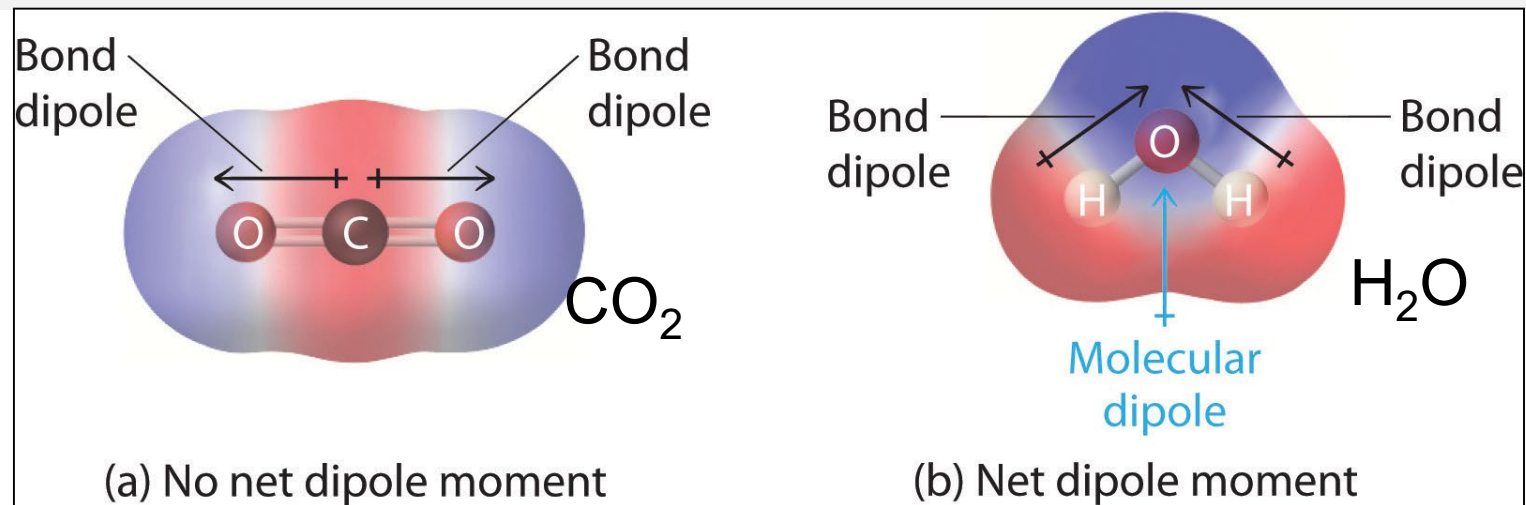
MOLECULE POLAIRE (DIPOLE ELECTRIQUE PERMANENT)



MOLECULE APOLAIRE (PAS DE DIPOLE ELECTRIQUE PERMANENT)

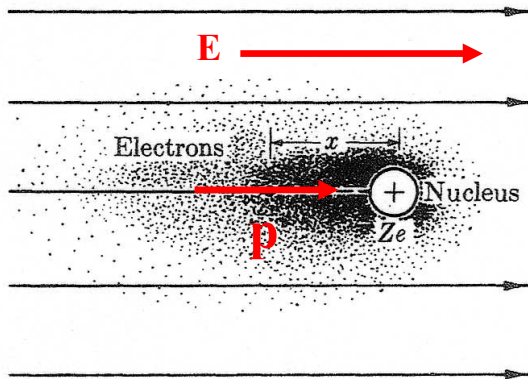


ROUGE: CHARGE NEGATIVE, BLEU: CHARGE POSITIVE

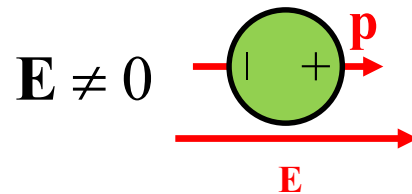
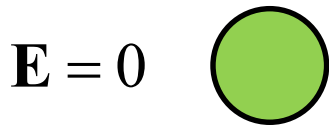


«Induction» et alignement des dipôles électriques

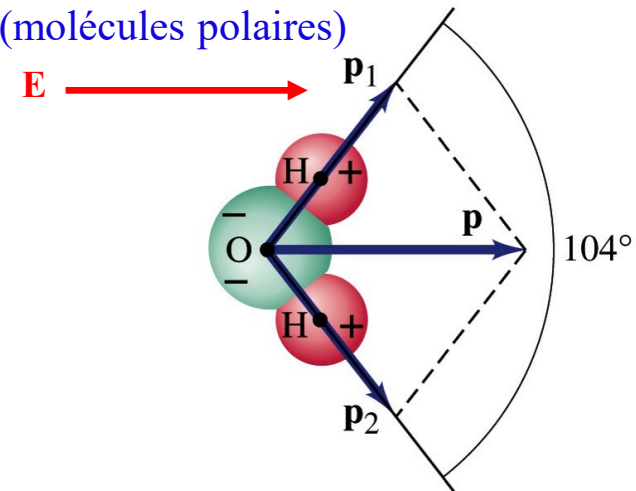
Molécules sans dipôle électrique permanent
(molécules apolaires)



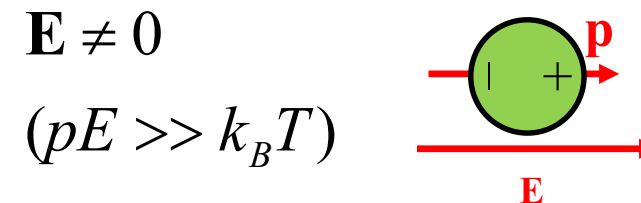
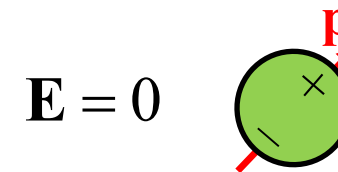
déformation de la distribution électronique
(dipôle électrique induit
dans la direction du champ E)

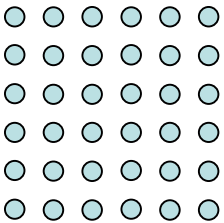
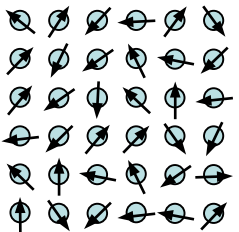
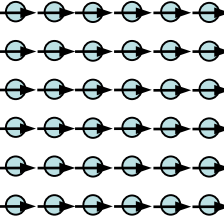
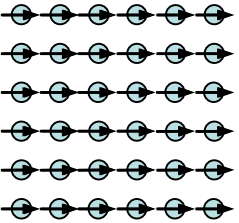


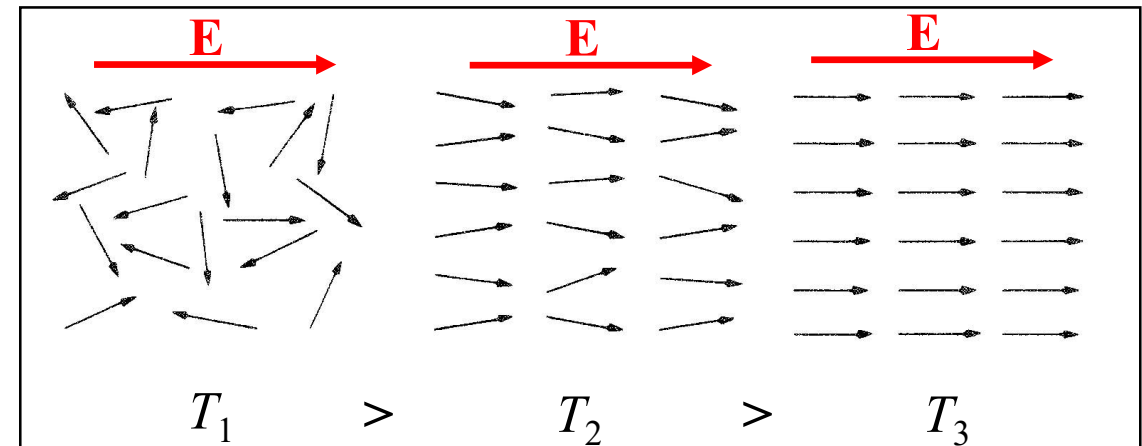
Molécules avec dipôle électrique permanent
(molécules polaires)



orientation du dipôle électrique dans
la direction du champ



	MOLECULES APOLAIRES	MOLECULES POLAIRES
$E = 0$		
$E \rightarrow$ $pE \gg k_B T$		



L'agitation thermique
s'oppose
à l'alignement des dipôles.

Energie potentielle électrique (pE)
vs
Energie thermique (kT)

Multipôles électriques

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV$$

pour $r \gg r'$ et $r \gg R$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \cdot \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r} - \dots$$

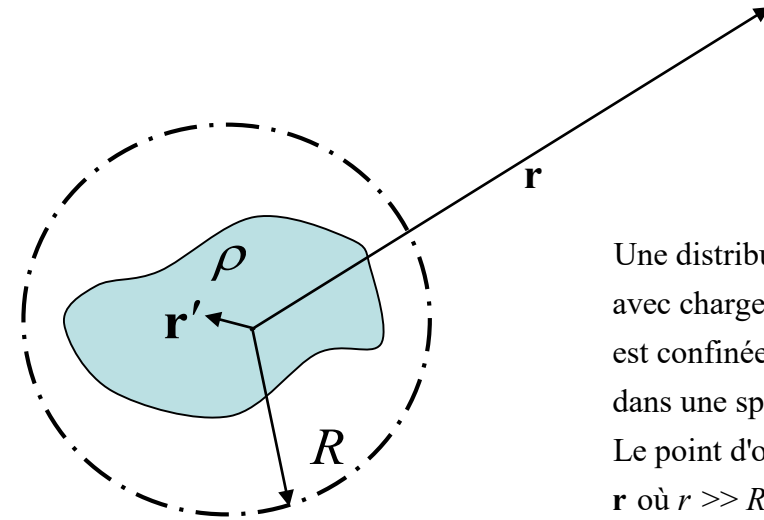
$$\Rightarrow V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + Q_{ij} \frac{3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} + \dots \right)$$

ou

$$Q \triangleq \sum_{\alpha} q_{\alpha}$$

$$\mathbf{p} \triangleq \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}$$

$$Q_{ij} \triangleq \frac{1}{2} \int_V r \rho(\mathbf{r}) r_i r_j dV = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_{\alpha} r_{\alpha i} r_{\alpha j}$$



Une distribution de charge localisée avec charge totale Q est confinée entièrement dans une sphère de rayon R . Le point d'observation est $\mathbf{r}$ où $r \gg R$.

Moment de monopole électrique (ou charge totale)

Moment de dipôle électrique (ou dipôle électrique)

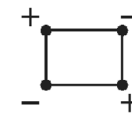
Moment de quadrupole électrique (ou quadrupole électrique)



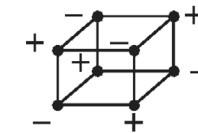
Monopole
($V \sim 1/r$)



Dipole
($V \sim 1/r^2$)



Quadrupole
($V \sim 1/r^3$)



Octopole
($V \sim 1/r^4$)

Potentiel et champ électrique produit par un dipôle électrique avec deux charges

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{+q}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}/2|} + \frac{-q}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}/2|} \right)$$

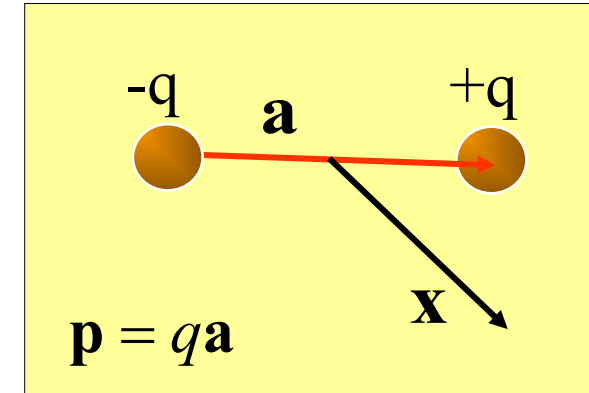
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{+q} + \mathbf{E}_{-q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}/2|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}/2}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}/2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}/2|^2} \frac{\mathbf{x} + \mathbf{a}/2}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}/2|}$$

Pour $x \gg a$ (...avec des «maths» pas très simples...):

$$V(\mathbf{x}) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^2}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p}}{|\mathbf{x}|^3}$$

p: moment de dipôle électrique

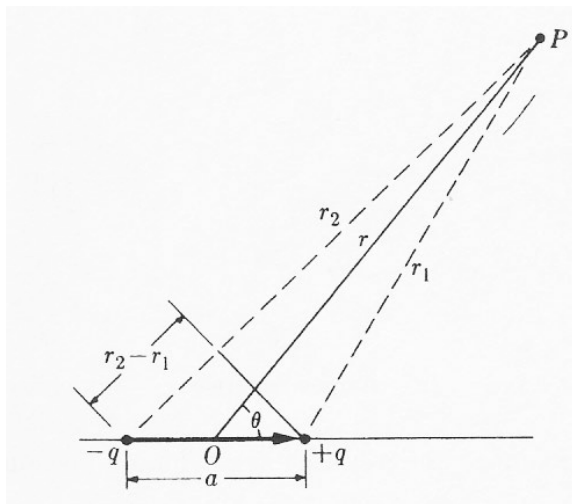


Note: Pour $x \gg a$,

$$E \propto \frac{p}{|x|^3}, \quad V \propto \frac{p}{|x|^2}$$

Le champ électrique E (et le potentiel électrique V) créé par un dipôle électrique diminue **plus rapidement** que le champ électrique E (et le potentiel électrique V) créé par une charge électrique ponctuelle.

....avec des «maths» plus simples (mais en coordonnées sphériques)....



$$\mathbf{p} = q\mathbf{r}^+ - q\mathbf{r}^- = q\mathbf{a}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Pour $r \gg a \Rightarrow r_2 - r_1 \cong a \cos \theta$ et $r_1 r_2 \cong r^2 \Rightarrow$

$$V(r, \theta) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa \cos \theta}{r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

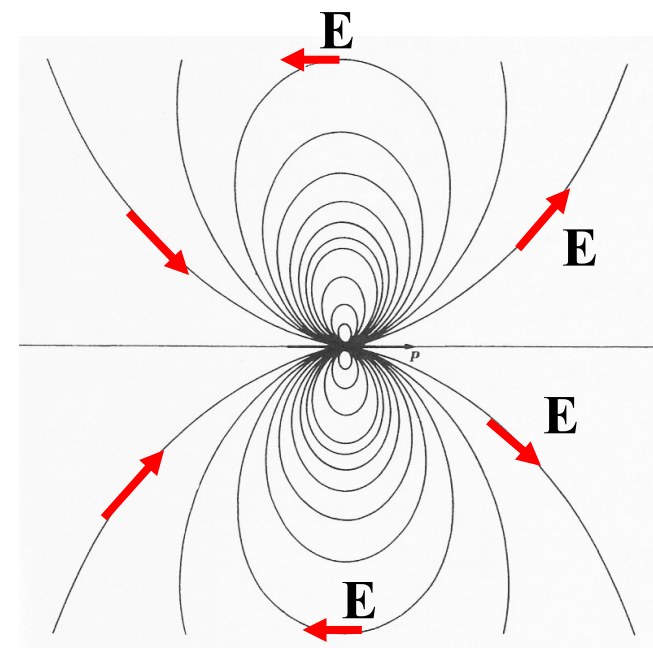
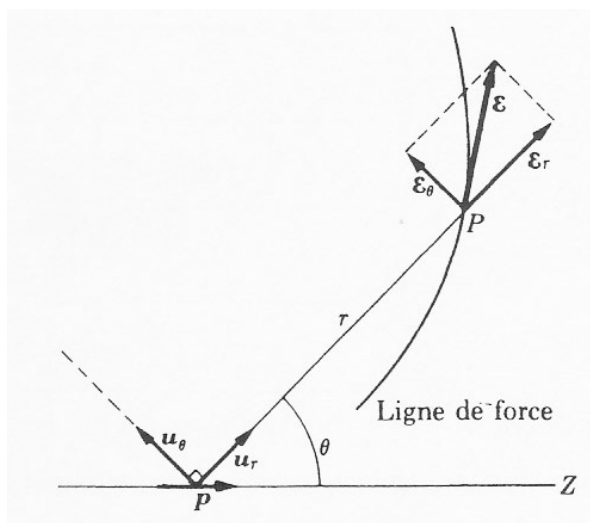
$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\mathbf{u}_r \frac{\partial V}{\partial r} - \mathbf{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$\Rightarrow$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\phi = 0$$

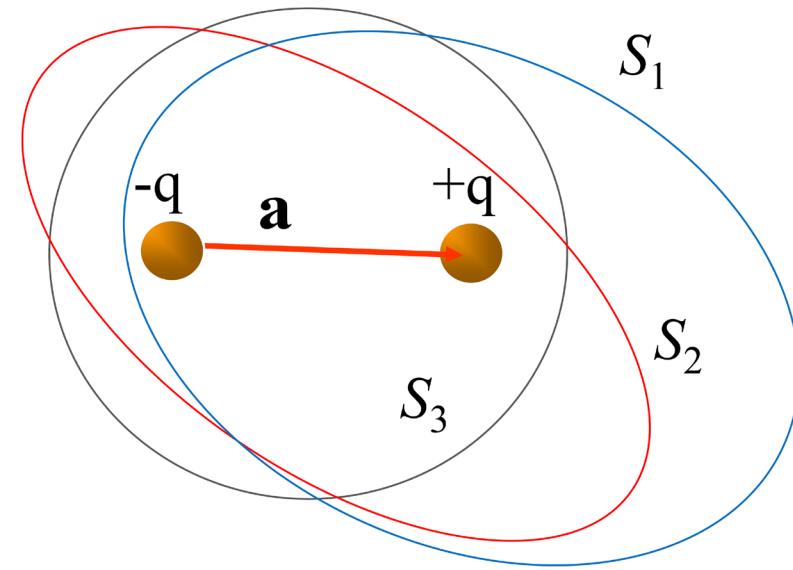


Notes:

1. Flux de $\mathbf{E}$ pour un dipôle.

$$\oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum_i q_i / \varepsilon_0 = 0$$

Note: $\oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ n'implique pas $\mathbf{E} = 0$

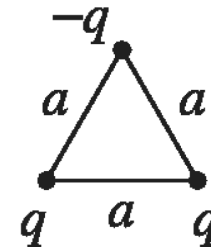
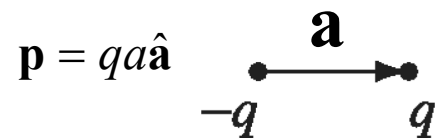


2. Dépendance de l'origine du système de coordonnées.

Si la charge totale est nulle, le moment dipolaire est indépendant du choix de l'origine.

Si la charge totale n'est pas nulle, le moment dipolaire dépend du choix de l'origine.

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i$$



$\mathbf{p}$ dépend de l'origine
du système de coordonnées

Force, couple, énergie potentielle pour un dipôle électrique dans un champ $\mathbf{E}$

Calculons la force et le couple exercée sur une distribution de charge neutre $\rho(\mathbf{r}')$ par un champ électrique externe $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ qui change "lentement" dans l'espace. Lentement signifie que le champ électrique est bien approximé par une expansion de la série de Taylor à deux termes autour d'un point de référence $\mathbf{r}$ situé dans la distribution de charge:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + ((\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \dots$$

$$\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV$$

$$\mathbf{F} = \int_V dV \rho(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}')$$

$$\mathbf{N} = \int_V dV \mathbf{r}' \times \rho(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}')$$

$\Rightarrow$ (sans démonstration)

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

$$U_E = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

Couple par rapport au centre du dipole (i.e., pour $\mathbf{r}=0$)

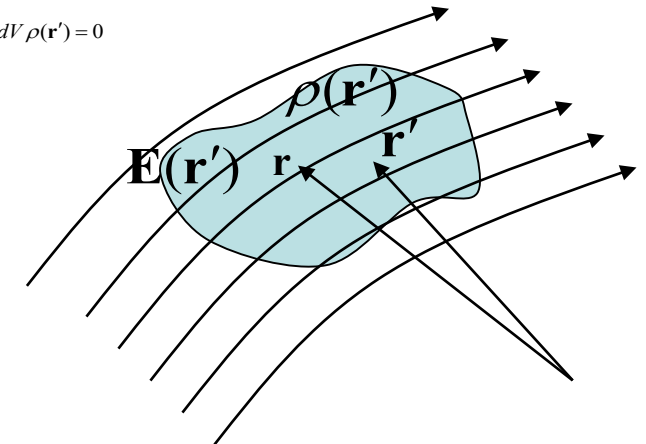
$$\mathbf{F} = \int_V dV \rho(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') = \int_V dV \rho(\mathbf{r}') (\mathbf{E}(\mathbf{r}) + ((\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})) = \int_V dV \rho(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \int_V dV \rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \int_V dV \rho(\mathbf{r}') (-\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\text{Pour en distribution de charges neutre } \int_V dV \rho(\mathbf{r}') = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_V dV \rho(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \int_V dV \rho(\mathbf{r}') = 0$$

$$\int_V dV \rho(\mathbf{r}') (-\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = (-\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \int_V dV \rho(\mathbf{r}') = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \int_V dV \rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$



Note 1: En général: $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \text{ si } \mathbf{p} \text{ est un vecteur constant et } \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\text{Dem.: Math: } \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{p}) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{p}$$

$$\text{donc en general } (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} \neq \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}).$$

Note 2: En général: $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \text{ si } \mathbf{r} = 0$

Dipôle électrique avec deux charges

dans un champ $\mathbf{E}$ uniforme

Force agissant sur le dipôle électrique

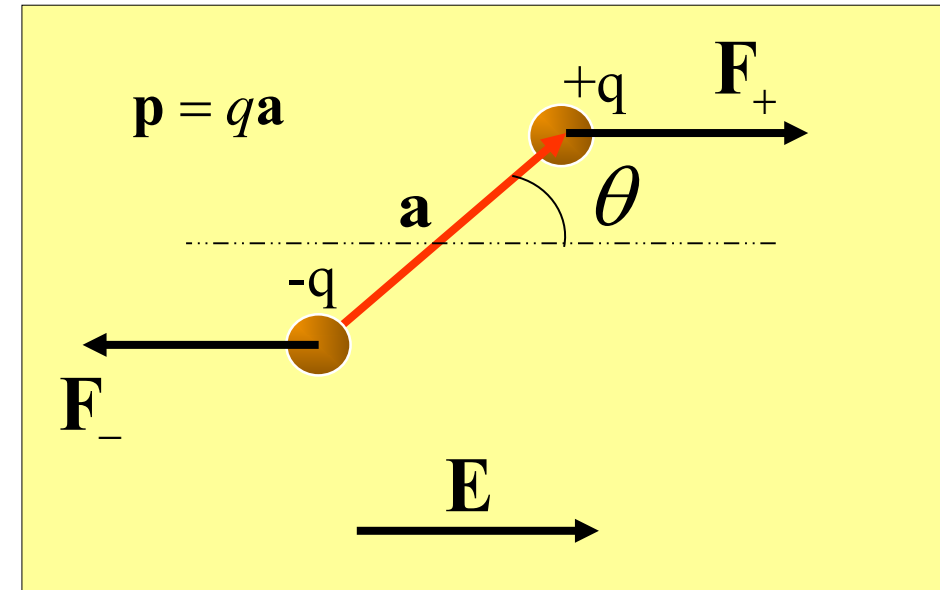
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q\mathbf{E} - q\mathbf{E} = 0$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}) &= \left(p_x \frac{\partial}{\partial x}, p_y \frac{\partial}{\partial y}, p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (E_x, E_y, E_z) = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x}, p_y \frac{\partial}{\partial y}, p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (E_x, 0, 0) = \\ &= \left(p_x \frac{\partial E_x}{\partial x}, p_y \frac{\partial E_x}{\partial y}, p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned}$$

Couple agissant sur le dipôle électrique:
(par rapport au centre du dipôle)

$$\mathbf{N} = (\mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+) + (\mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_-) = q\mathbf{a} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

$$(\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \text{mais } \mathbf{r} = 0 \text{ et } \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E})$$



le couple tend à aligner
le dipôle avec le champ

Note: Le champ "interne" $\mathbf{E}^{\text{int}}$ produit par q et $-q$
donne $\mathbf{F}^{\text{int}} = 0$ et $\mathbf{N}^{\text{int}} = 0$

Susceptibilité, permittivité, constante diélectrique

En général:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Dans les matériaux linéaires:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

$$\chi_e \triangleq \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0 \mathbf{E}} \quad \text{Susceptibilité électrique}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$$

$$\varepsilon \triangleq \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{E}} \quad \text{Permittivité électrique}$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \text{Constante diélectrique relative}$$

TABLE 26.1 Dielectric Constants and Dielectric Strengths of Various Materials at Room Temperature

Material	ε_r	Dielectric Constant κ	Dielectric Strength ^a (V/m)
Air (dry)		1.000 59	3×10^6
Bakelite		4.9	24×10^6
Fused quartz		3.78	8×10^6
Neoprene rubber		6.7	12×10^6
Nylon		3.4	14×10^6
Paper		3.7	16×10^6
Polystyrene		2.56	24×10^6
Polyvinyl chloride		3.4	40×10^6
Porcelain		6	12×10^6
Pyrex glass		5.6	14×10^6
Silicone oil		2.5	15×10^6
Strontium titanate		233	8×10^6
Teflon		2.1	60×10^6
Vacuum		1.000 00	—
Water		80	—

^a The dielectric strength equals the maximum electric field that can exist in a dielectric without electrical breakdown. Note that these values depend strongly on the presence of impurities and flaws in the materials.

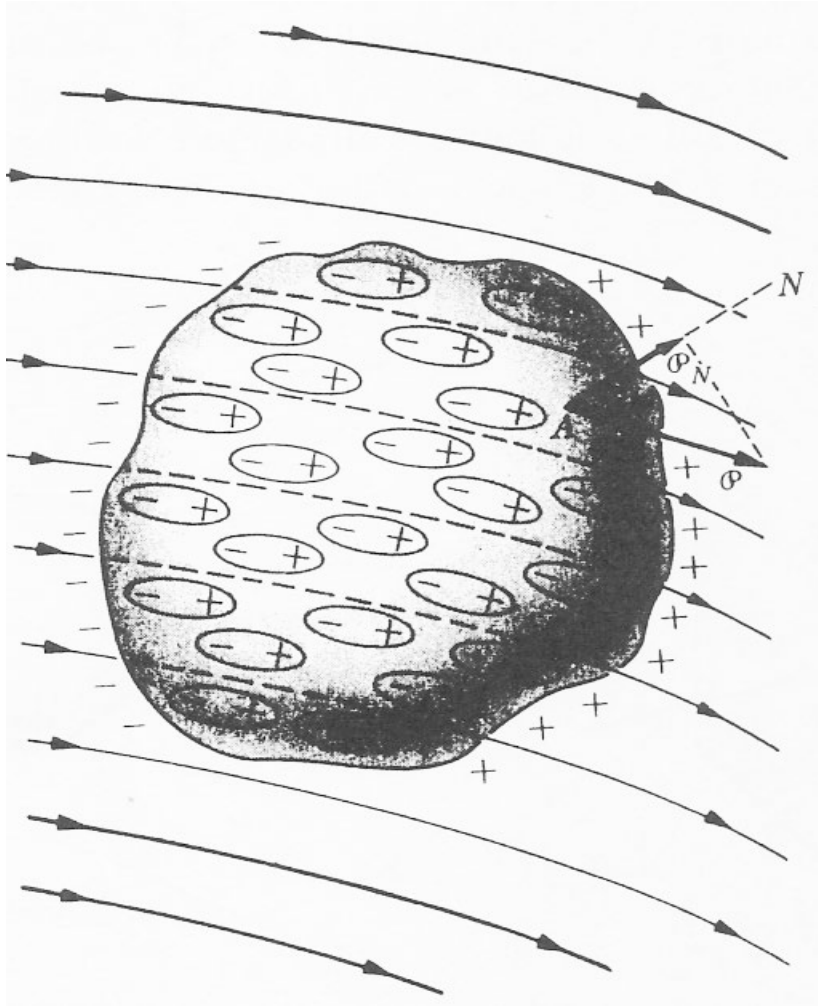
Note:

Matériaux diélectriques: $\chi_e > 0$

Matériaux magnétiques: $\chi_m > 0$ (paramagnétiques et ferromagnétiques)

$\chi_m < 0$ (diamagnétique)

Champ électrique à l'intérieur d'un isolant diélectrique



Equations de Maxwell et relations pertinentes:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \qquad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_f dV$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \qquad \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV / \varepsilon_0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Pour un matériau linéaire: $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$

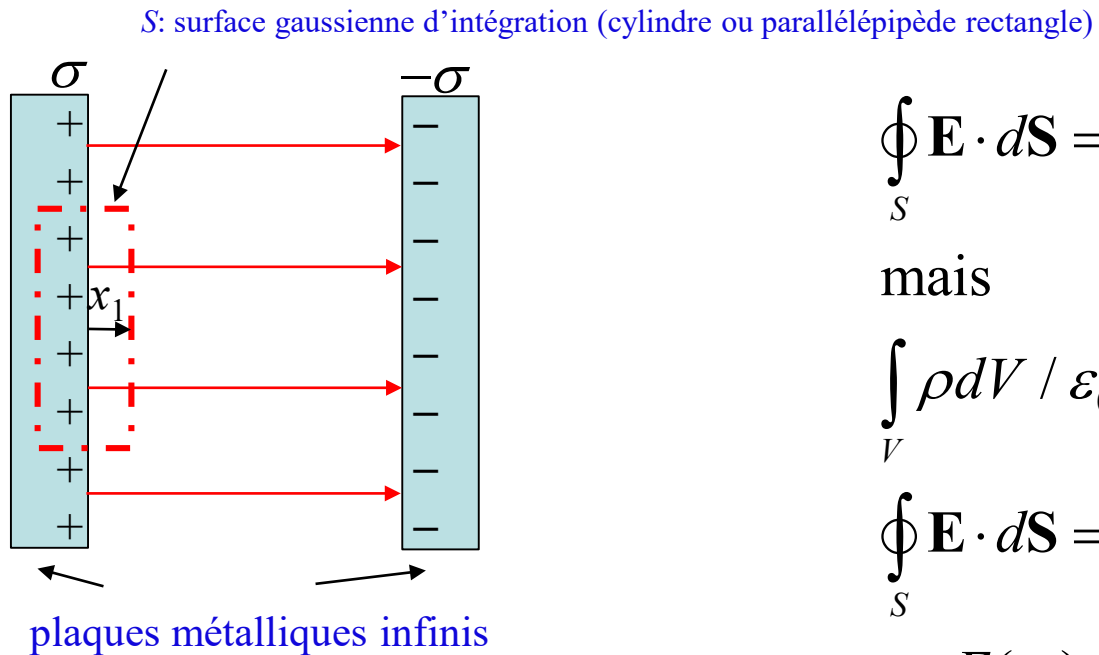
σ_b : densité de charge de surface liée

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$$

$\mathbf{n}$: vecteur unitaire normale à la surface

Exemples de calcul du champ électrique dans un condensateur a face parallèle

Exemple 1. Plaques métalliques infinies dans le vide (cas particulier $\epsilon_r=1$)



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV / \epsilon_0$$

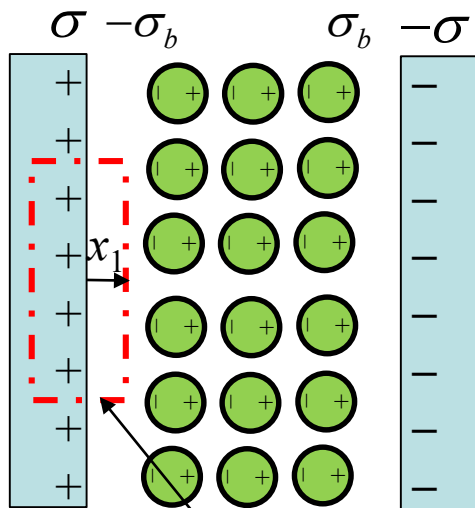
mais

$$\int_V \rho dV / \epsilon_0 = \sigma A / \epsilon_0$$

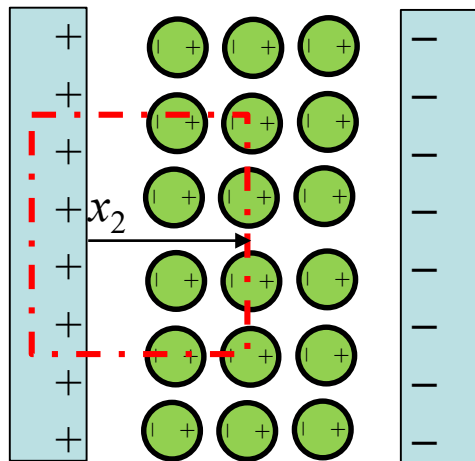
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(x_1) A$$

$$\Rightarrow E(x_1) = \sigma / \epsilon_0$$

Exemple 2. Plans métalliques infinis avec diélectrique



Cylindre (ou parallélépipède rectangle)



a. Calculs à partir de la loi de Gauss pour le champ $\mathbf{E}$:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV / \epsilon_0$$

$$\text{mais: } \int_V \rho dV / \epsilon_0 = \sigma A / \epsilon_0$$

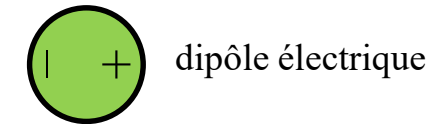
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(x_1) A$$

$$\Rightarrow E(x_1) = \sigma / \epsilon_0$$

σ : densité de charge de surface totale
($=\sigma_f$ dans cet exemple)

σ_b : densité de charge de surface liée

ϵ_r : constante diélectrique



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV / \epsilon_0$$

$$\text{mais: } \int_V \rho dV / \epsilon_0 = (\sigma A - \sigma_b A) / \epsilon_0 = (\sigma - \sigma_b) A / \epsilon_0$$

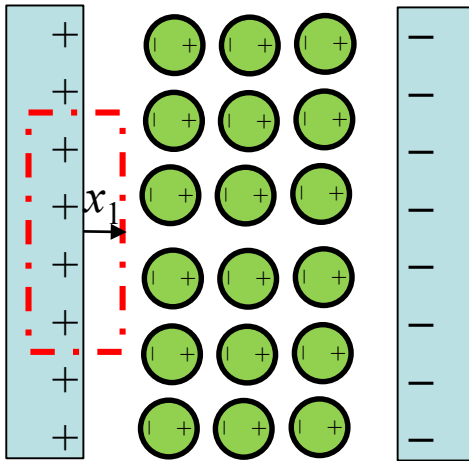
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(x_2) A$$

$$\Rightarrow E(x_2) = (\sigma - \sigma_b) / \epsilon_0$$

$$\text{mais } \sigma_b = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E(x_2)$$

$$\Rightarrow E(x_2) = \sigma / \epsilon_0 \epsilon_r$$

Le champ $\mathbf{E}$ à l'intérieur du matériau diélectrique (isolant) est réduit par effet de la polarisation du matériau.



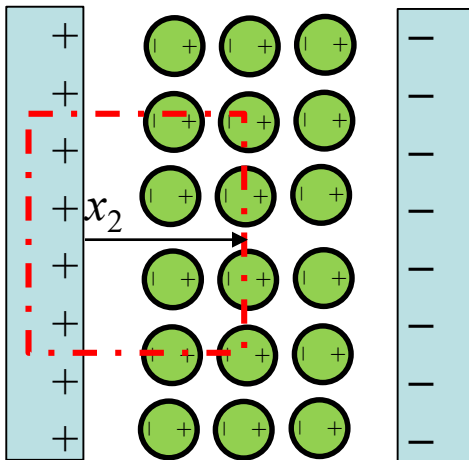
b. Calculs à partir de la loi de Gauss pour le champ $\mathbf{D}$:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_f dV$$

$$\text{mais: } \int_V \rho_f dV = \sigma A$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 E(x_1) A$$

$$\Rightarrow E(x_1) = \sigma / \epsilon_0$$



$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_f dV$$

$$\text{mais : } \int_V \rho_f dV = \rho V = \sigma A$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \epsilon_r E(x_2) A$$

$$\Rightarrow E(x_2) = \sigma / \epsilon_0 \epsilon_r$$

Autre démarche:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_f dV$$

$$\text{mais: } \int_V \rho_f dV = \rho V = \sigma A$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 E(x_2) A + P(x_2) A$$

$$= \epsilon_0 E(x_2) A + \sigma_b A$$

$$\Rightarrow E(x_2) = (\sigma - \sigma_b) / \epsilon_0$$

$$\text{mais } \sigma_b = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E(x_2)$$

$$\Rightarrow E(x_2) = \sigma / \epsilon_0 \epsilon_r$$

Note 1:

$\mathbf{D}$ est, dans cet exemple, influencé uniquement par les charges «libres».

(Ce résultat n'est pas valable en général !!!)

1

$$\mathbf{E}(x_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{x}}$$

2

$$\mathbf{E}(x_2) = \frac{\mathbf{E}(x_1)}{\varepsilon_r}$$

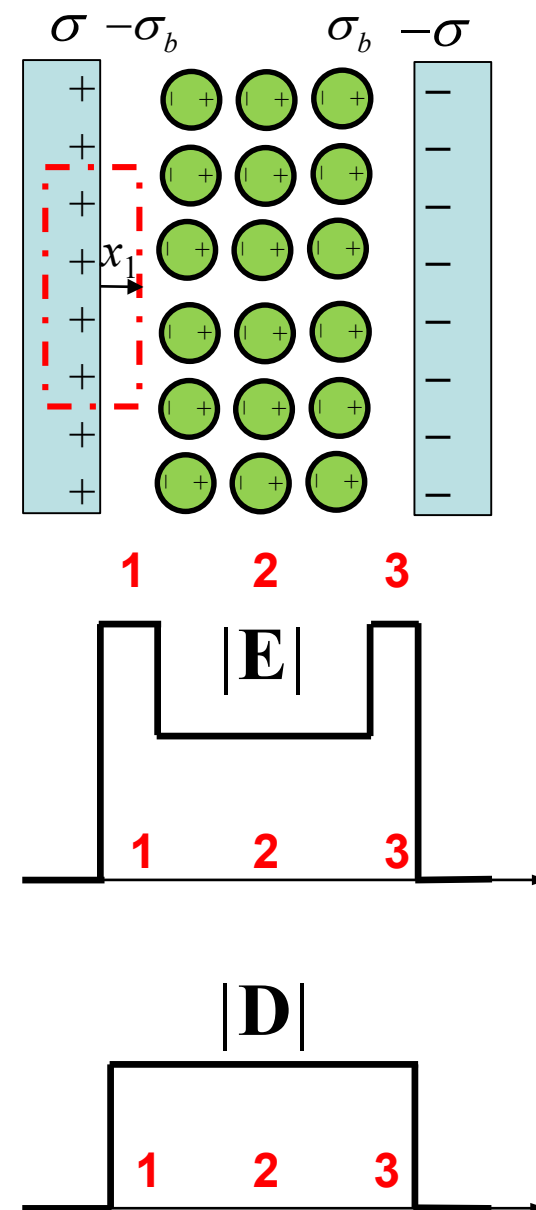
3

$$\mathbf{E}(x_3) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{D}(x_1) = \sigma \hat{\mathbf{x}}$$

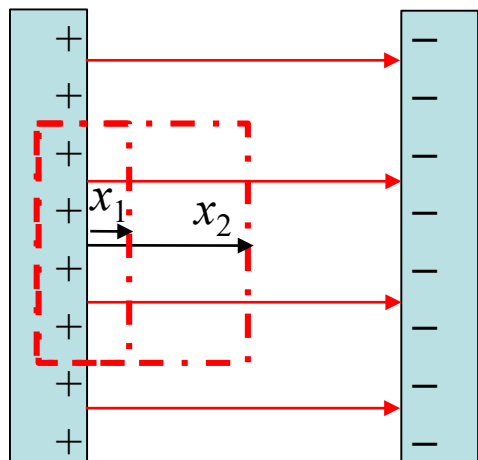
$$\mathbf{D}(x_2) = \sigma \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{D}(x_3) = \sigma \hat{\mathbf{x}}$$

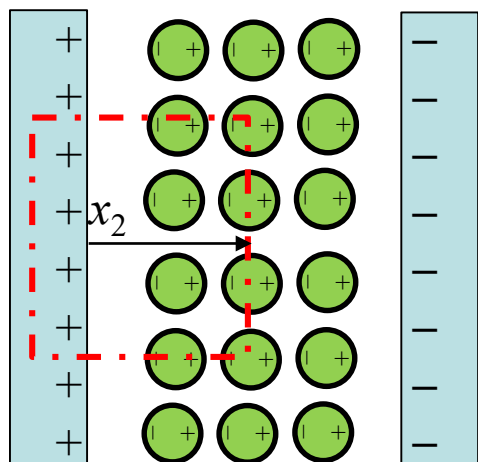


Note 2.

Le champ $\mathbf{E}$ à l'intérieur du matériau diélectrique (isolant) est **réduit** par effet de la polarisation du matériau.



$$E(x_2) = E(x_1) = \sigma / \epsilon_0$$



$$E(x_2) = (\sigma - \sigma_b) / \epsilon_0 = (\sigma - P) / \epsilon_0 = \sigma / \epsilon_0 \epsilon_r$$

le champ $\mathbf{E}$ est réduit d'un facteur ϵ_r

$$\epsilon_r(\text{vide}, 300 \text{ K}) = 1$$

$$\epsilon_r(\text{air}, 300 \text{ K}) \cong 1.00054$$

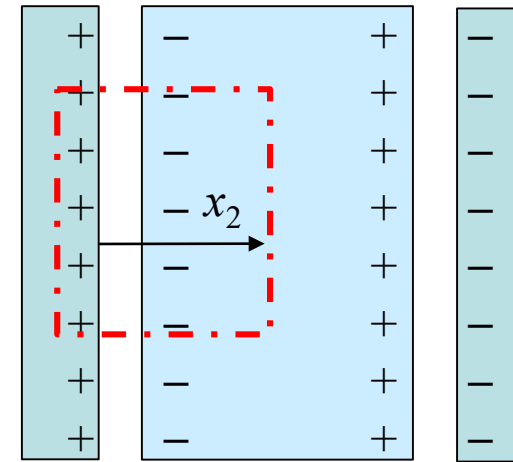
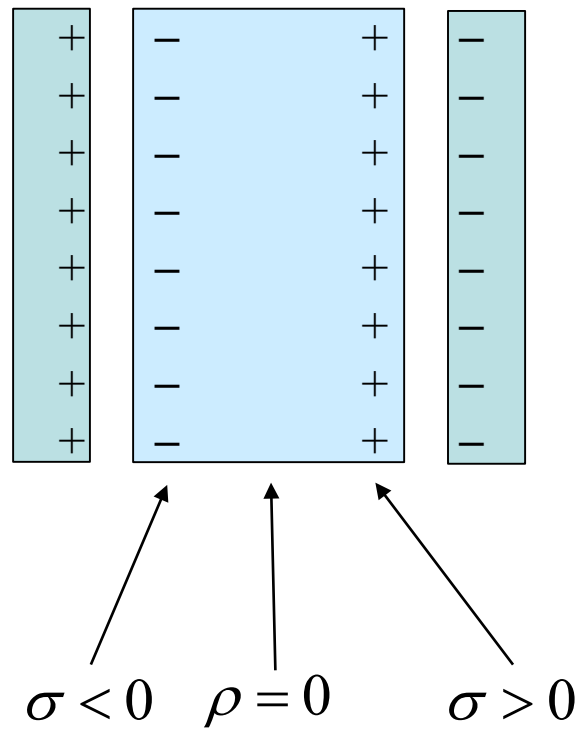
$$\epsilon_r(\text{plexiglass}, 300 \text{ K}) \cong 3.5$$

$$\epsilon_r(\text{verre}, 300 \text{ K}) \cong (3 \text{ à } 10)$$

$$\epsilon_r(\text{quartz}, 300 \text{ K}) \cong 4.5$$

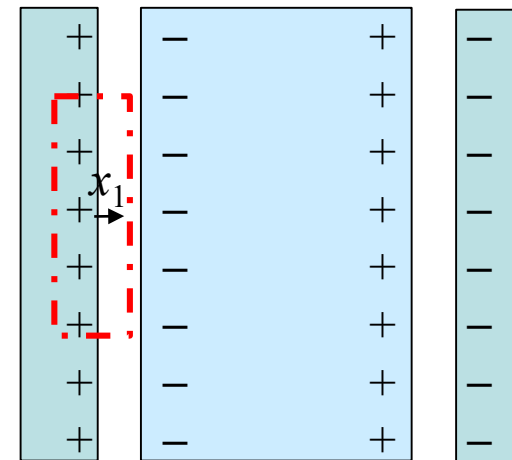
$$\epsilon_r(\text{H}_2\text{O}, 300 \text{ K}) \cong 80$$

Rappel: champ électrique à l'intérieur d'un conducteur

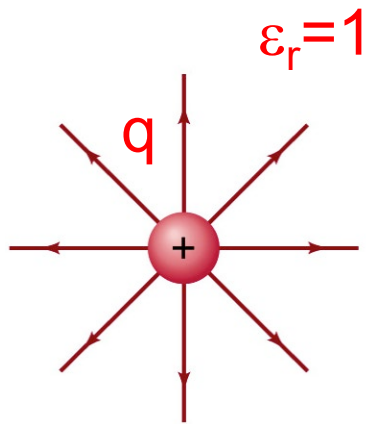


$$E(x_2) = 0$$

$$E(x_1) = \sigma / \epsilon_0$$



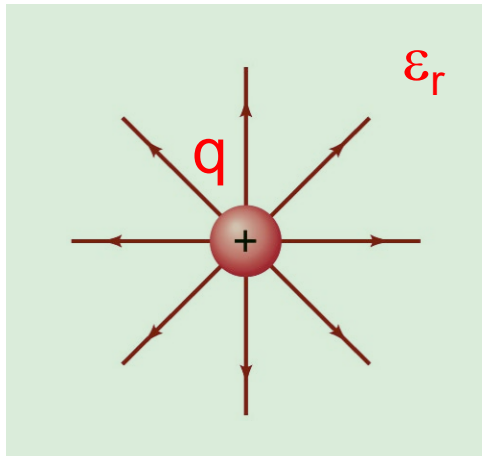
Ecrantage du champ E dans un diélectrique



$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_f dV = q$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 E 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

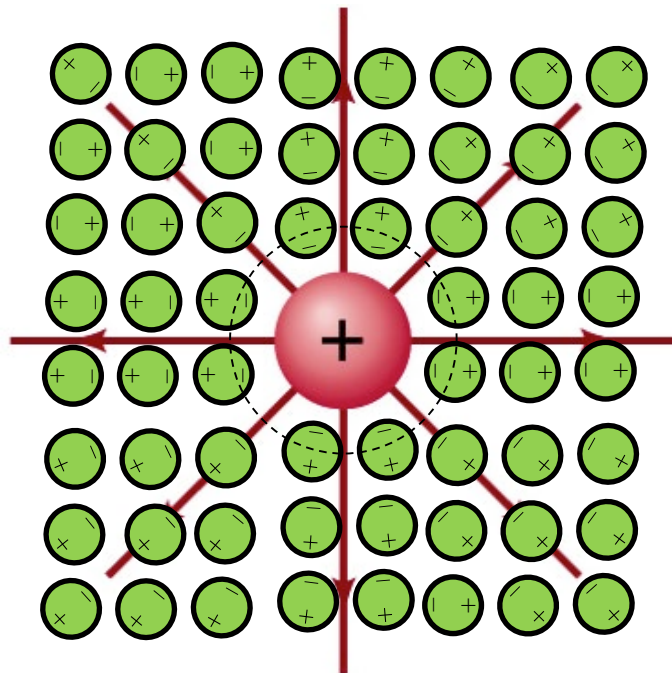


$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_f dV = q$$

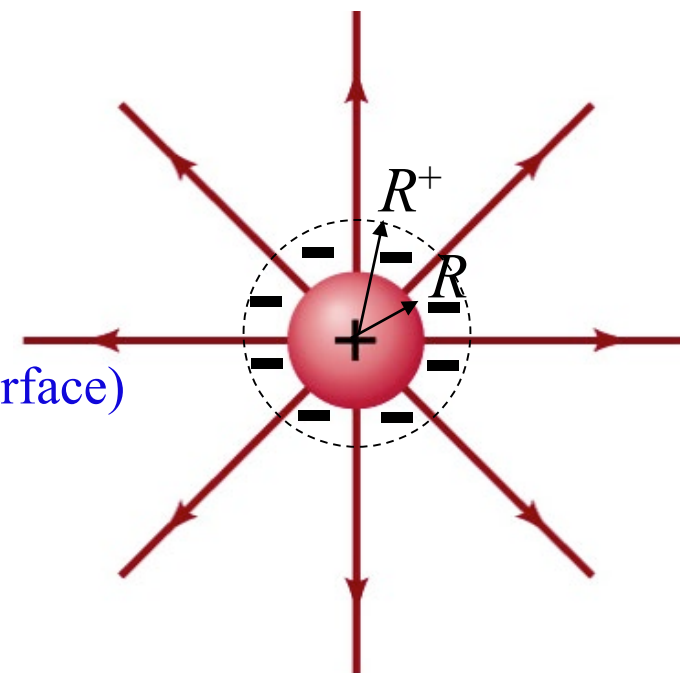
$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \epsilon_r E 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q}{r^2}$$

Réalité
(dipôles électriques)



Modèle équivalent
(charges liées de surface)



$$r > R : \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \int_V \frac{\rho_f}{\epsilon_0} dV + \int_V \frac{\rho_b}{\epsilon_0} dV = \frac{q}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_b S_R}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} (q - P(R^+) S_R)$$

$$r = R : \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \int_V \frac{\rho_f}{\epsilon_0} dV = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E(R^+) = \frac{1}{\epsilon_r} E(R) \quad (\text{Condition: } E_{n1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_{n2} \text{ (voir chapitre "Aperçu de l'électromagnétisme")})$$

$$P(R^+) = D - \epsilon_0 E(R^+) = \epsilon_0 E(R) \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r}$$

$$S_R = 4\pi R^2$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E(r)$$

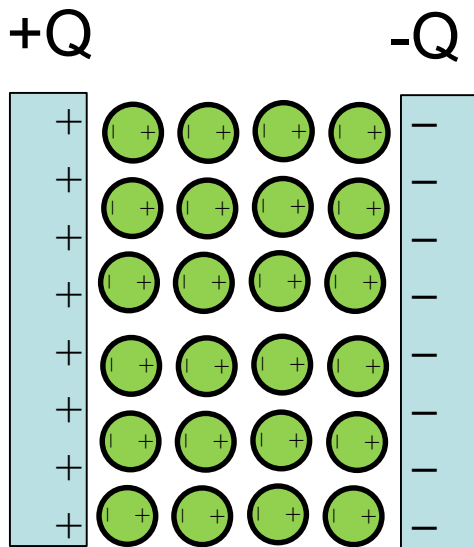
$$\oint_{S_R} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi R^2 E(R)$$

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left(q - q \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q}{r^2}$$

Problèmes électrostatiques avec géométrie plus compliquée

Problèmes: A partir de $(+Q, -Q, \varepsilon_r)$ déterminer $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{P})$

Solution:
Facile
(analytique)



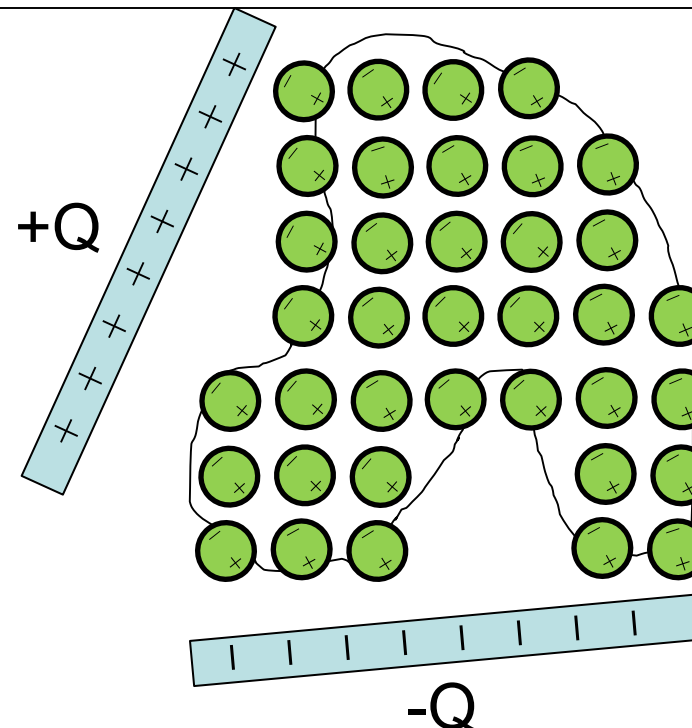
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$$

Par symétrie:

$\mathbf{E} \cong E \hat{\mathbf{x}}$ avec $E = \text{const}$ entre les plaques

$\mathbf{D} \cong D \hat{\mathbf{x}}$ avec $D = \text{const}$ entre les plaques

$\mathbf{P} \cong P \hat{\mathbf{x}}$ avec $P = \text{const}$ entre les plaques



Solution:
Difficile
(numérique)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$$

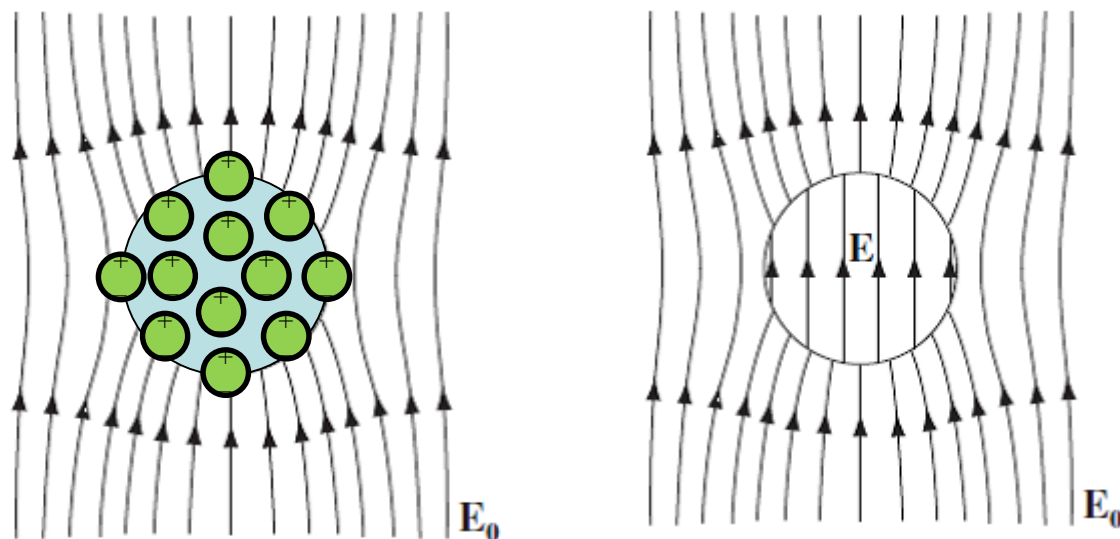
$\mathbf{E} = ?$

$\mathbf{D} = ?$

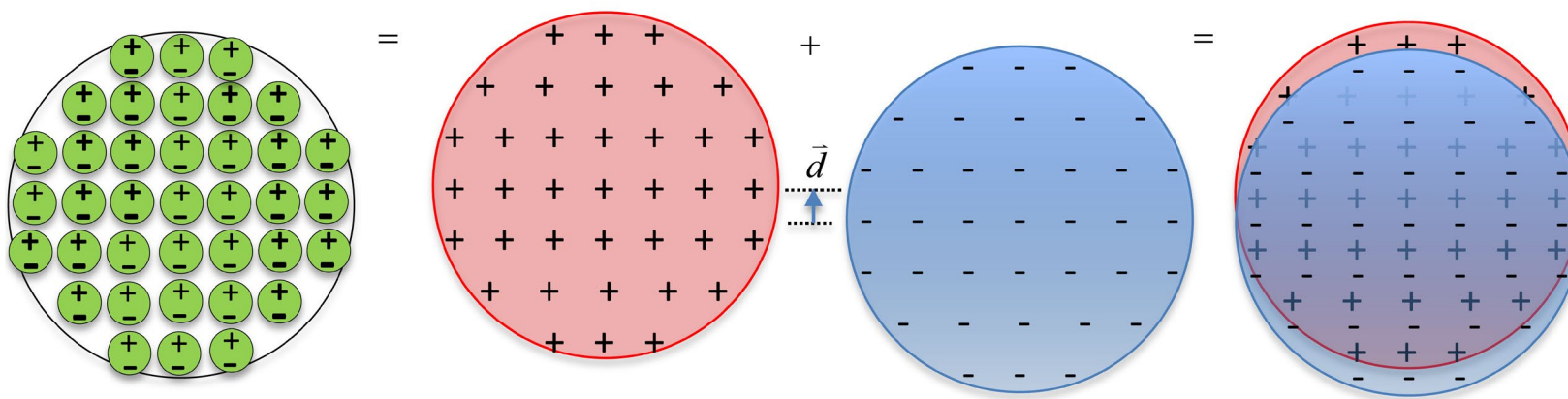
$\mathbf{P} = ?$

Problème:

Sphère diélectrique dans un champ homogène $\mathbf{E}_0$. A partir de $(\epsilon_r, \mathbf{E}_0)$, déterminer $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{P})$



Solution:
Relativement
facile avec une
modélisation
appropriée
(analytique)
(voir exercice
Série 6)



Energie potentielle électrostatique d'une charge

Une charge q est déplacée “quasi-statiquement” (i.e., avec énergie cinétique négligeable) de $\mathbf{r}_A$ à $\mathbf{r}_B$ sous l'action d'une force qui équilibre en chaque point la force électrique $q\mathbf{E}$.

Le travail W fait par cette force est:

$$W = U_E(\mathbf{r}_B) - U_E(\mathbf{r}_A)$$

$$W = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = qV(\mathbf{r}_B) - qV(\mathbf{r}_A)$$

$$\Rightarrow$$

U_E : Energie potentielle électrostatique
de la charge q
en $\mathbf{r}$

$$U_E(\mathbf{r}) = qV(\mathbf{r})$$

V : potentiel électrique
en $\mathbf{r}$

Notes:

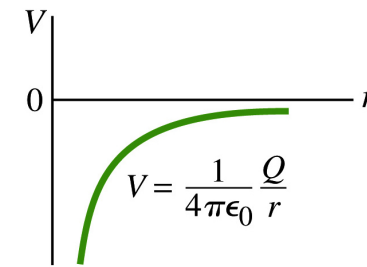
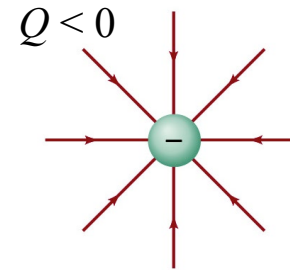
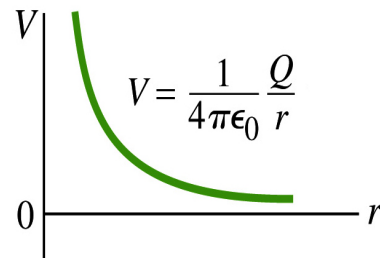
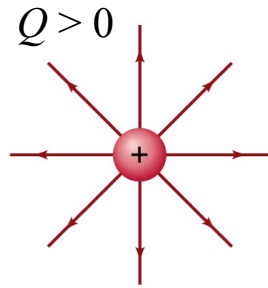
1. Le travail effectué est indépendant du chemin que vous prenez de $\mathbf{r}_A$ à $\mathbf{r}_B$ (la force électrostatique est conservative).
2. Une particule chargée placée dans un champ électrique $\mathbf{E}$ possède une énergie potentielle électrostatique parce que le champ exerce sur elle une force. Du travail a dû être fourni pour amener la charge en un point donné du champ $\mathbf{E}$.
(Analogie avec l'énergie potentielle gravitationnelle).
3. Le potentiel électrique en un point d'un champ électrique est défini comme l'énergie potentielle d'une charge unité placée en ce point.
4. Unités: $[V]=V$, $[q]=C \rightarrow [W]=[U_E]=J$; $(1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ CV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J})$

Exemple: Charge ponctuelle q dans le champ E d'une charge ponctuelle Q

Potentiel électrique associé au champ électrique créé par la charge Q

En supposant $V(\infty)=0$

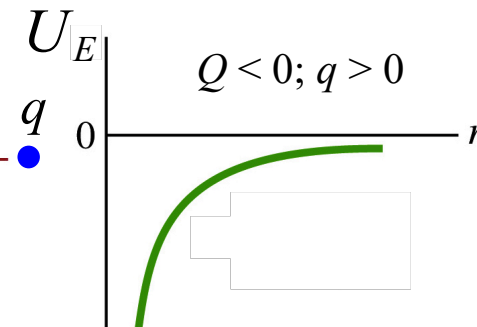
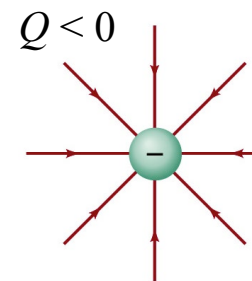
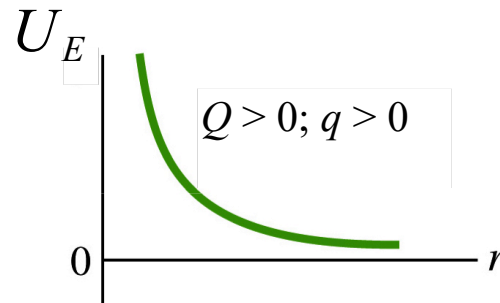
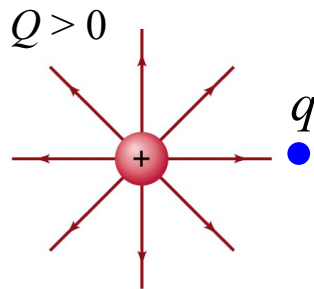
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \Rightarrow V(\mathbf{r}) = V(\infty) - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$



V dépend de la charge «source» Q

Energie potentielle électrique de la charge q dans le champ électrique créé par la charge Q

$$U_E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}$$



U_E dépend des deux charges

Energie potentielle électrostatique d'une ensemble de charges

dans le vide

L'énergie potentielle électrostatique est définie comme le travail total requis pour assembler une distribution de charge à partir de l'état initial où toute la charge est «dispersée à l'infini spatial». Nous supposons que le travail est effectué de manière quasi-statique par un agent externe de manière à ce qu'aucun effet dissipatif ne se produise.

Le travail requis pour amener la **première charge** à partir de l'infini est zéro, car $\mathbf{E} = 0$ partout (le champ produit par la charge elle-même n'exerce aucune force sur la charge elle-même !).

$$W_1 = 0$$

Donc l'énergie potentielle électrostatique totale pour **une charge** est:

$$U_{E,1} = 0$$

Le travail requis pour amener la **deuxième charge** en place dans le champ $\mathbf{E}$ produit par la première charge est:

$$W_2 = q_2 (V_1(\mathbf{r}_2) - V_1(\infty)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \frac{q_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Donc l'énergie potentielle électrostatique totale pour **deux charges** est:

$$U_{E,2} = W_1 + W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \frac{q_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

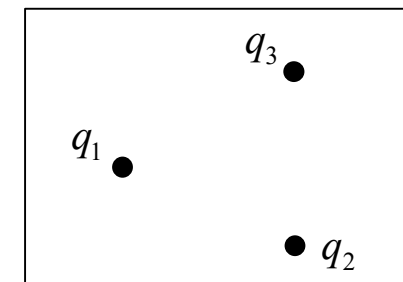
Le travail requis pour amener la **troisième charge** en place dans le champ $\mathbf{E}$ produit par la première et la deuxième charge est:

$$W_3 = q_3 (V_{1,2}(\mathbf{r}_3) - V_{1,2}(\infty)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right)$$

Donc l'énergie potentielle électrostatique totale pour **trois charges** est:

$$U_{E,3} = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \frac{q_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{q_1 q_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{q_2 q_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right)$$

Exemple:
Ensemble de trois
charges ponctuelles



Cela peut être généralisé à N charges ponctuelles q_i et pour à une distribution continue de charge $\rho(\mathbf{r})$:

$$U_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\mathbf{r}_i)$$

Potentiel électrostatique dû à toutes les charges, sauf la charge q_i (voir G 96)

Distribution de N charges ponctuelles q_i

Les termes $i = j$ doivent être omis dans la double somme (ce sont des termes non physiques de "auto-énergie infinie")

$$U_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_V d^3r \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V |\mathbf{E}|^2 dV = \int_V u_E dV$$

Distribution continue de charge $\rho(\mathbf{r})$

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \rho V dV \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) V dV$$

$$\text{mais, math.(G. 37): } (\nabla \cdot \mathbf{E}) \Phi = \nabla \cdot (V \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla V) \Rightarrow U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\int_V \nabla \cdot (V \mathbf{E}) dV - \int_V \mathbf{E} \cdot (\nabla V) dV \right) =$$

$$\begin{aligned} \text{mais } \nabla V = -\mathbf{E} \quad \text{et:} \quad \int_V \nabla \cdot (V \mathbf{E}) dV &= \oint_S (V \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = 0 \\ \Rightarrow U_E &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V |\mathbf{E}|^2 dV = \int_V u_E dV \quad \text{ou:} \quad u_E \equiv \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \end{aligned}$$

Volume beaucoup plus grand que le volume occupé par les charges (volume où le champ $\mathbf{E}$ est significativement différent de zéro)

Théorème de la divergence

Surface très loin de toutes les charges

Nous avons donc des expressions équivalentes pour l'énergie potentielle électrostatique U_E pour une:

- distribution de N charges ponctuelles q_i
- distribution continue de charge $\rho(\mathbf{r})$

Note : Une incohérence....apparente (voir G. 96):

Selon l'équation $U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V |\mathbf{E}|^2 dV$, U_E est toujours positive. Selon l'équation $U_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\mathbf{r}_i)$, U_E peut être positif ou négatif.

Quelle équation est correcte ?

La réponse est: ils sont tous les deux corrects mais l'énergie qu'ils représentent n'est pas exactement la même!

Où l'incohérence s'est glissée dans la dérivation des equation ?

Le «défaut» se situe entre les équations $U_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\mathbf{r}_i)$ et $U_E = \frac{1}{2} \int_V \rho V dV$

$V(\mathbf{r}_i)$ représente le potentiel dû à toutes les autres charges mais pas à q_i , alors que dans le dernier, $V(\mathbf{r})$ est le "plein" potentiel.

Pour une distribution continue, il n'y a pas de distinction, puisque la quantité de charge juste au point r est extrêmement petite, et sa contribution au potentiel est nulle.

Conclusion:

$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V |\mathbf{E}|^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \rho V dV$: donne l'énergie totale stockée dans la configuration de charge $\rho(\mathbf{r})$.

Pour une charge ponctuelle cette equation donne un energie infini, donc n'est pas applicable dans le cas de charge ponctuelle.

$U_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\mathbf{r}_i)$: est approprié pour des charges ponctuelle,

car nous préférons laisser de côté la partie de l'énergie totale attribuable à la "fabrication" des charges ponctuelles.

Les charges ponctuelles (e.g., les electrons) nous sont données "prêt à l'emploi", tout ce que nous faisons est de les déplacer.

Puisque nous ne les avons pas rassemblés, et nous ne pouvons pas les démonter,

il est raisonnable de ne pas considérer la quantité de travail qui serait nécessaire pour les assembler.

Energie potentielle électrostatique d'un ensemble de charges en présence d'un matériau diélectrique linéaire

Par définition, l'énergie potentielle électrostatique est le travail requis pour assembler le système de charges.

Lorsque les diélectriques sont impliqués, il y a deux manières d'interpréter ce processus:

1) Nous apportons toutes les charges (libres et liés), une à une et les collons chacune à son emplacement final.

Si tel est le cas:

$$U_E^* = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 dV \quad u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2$$

Dans ce cas, le travail impliqué dans l'étirement et la torsion des molécules (polarisation) n'est pas inclus.

2) Avec le diélectrique non polarisé en place, nous apportons les charges libres, une par une, permettant au diélectrique de répondre comme il l'entend.

Si tel est le cas:

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV \quad u_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

Dans ce cas, le travail impliqué dans l'étirement et la torsion des molécules (polarisation) est inclus.

Nous utiliserons cette définition pour l'énergie potentielle électrostatique totale.

Note 1: $U_E = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV$ (et $U_E = \frac{1}{2} \int_V \rho V dV$) ne sont valables que si le comportement du matériau est linéaire.

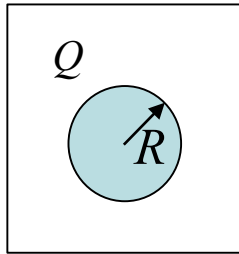
Pour les systèmes dissipatifs et les systèmes non linéaires, l'énergie potentielle perd son sens, car le travail effectué dépend non seulement de la configuration finale, mais aussi de la manière dont elle a été obtenue.

Note 2: $\frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 dV$ Energie potentielle totale des dipôles dans un champ électrique $\mathbf{E}_0$ dans le vide.

(énergie pour polariser un matériau linéaire tenant les charges qui ont créé $\mathbf{E}_0$ fixe)

Exemples de calcul de l'énergie potentielle électrostatique

1. Energie électrostatique d'une sphère isolante avec $\epsilon_r=1$ et densité de charge libre uniforme:



$$Q = \rho_f \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\epsilon_r = 1$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \hat{\mathbf{r}} & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} & r > R \end{cases}$$

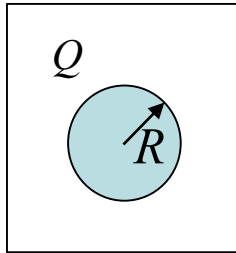
$$V(R) - V(\infty) = - \int_{\infty}^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\Rightarrow V(R) - V(\infty) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

$$\text{Assuming } V(\infty) = 0 \Rightarrow V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

$$U_E = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dV = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 (4\pi r^2) dr = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \cong \frac{1}{2} QV(R)$$

2. Energie électrostatique d'une sphère isolante avec $\epsilon_r > 1$ et densité de charge libre uniforme:



$$Q = \rho_f \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\epsilon_r > 1$$

De la loi de Gauss:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_f}{3} r \hat{\mathbf{r}} & (r < R) \\ \frac{\rho_f}{3} \frac{R^3}{r^2} \hat{\mathbf{r}} & (r > R) \end{cases} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_f}{3\epsilon_0\epsilon_r} r \hat{\mathbf{r}} & (r < R) \\ \frac{\rho_f}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \hat{\mathbf{r}} & (r > R) \end{cases}$$

Donc:

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_f}{3\epsilon_0\epsilon_r} \right) \frac{\rho_f}{3} \int_0^R r^2 4\pi r^2 dr + \left(\frac{\rho_f}{3} R^3 \right) \left(\frac{\rho_f}{3\epsilon_0} R^3 \right) \int_R^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr \right] = \frac{2\pi}{9\epsilon_0} \rho_f^2 R^5 \left(\frac{1}{5\epsilon_r} + 1 \right)$$

Note:

$$U_E^* = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\left(\frac{\rho_f}{3\epsilon_0\epsilon_r} \right)^2 \int_0^R r^2 4\pi r^2 dr + \left(\frac{\rho_f}{3\epsilon_0} R^3 \right)^2 \int_R^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr \right] = \frac{2\pi}{9\epsilon_0} \rho_f^2 R^5 \left(\frac{1}{5\epsilon_r^2} + 1 \right) \quad \epsilon_r > 1$$

$\Rightarrow$

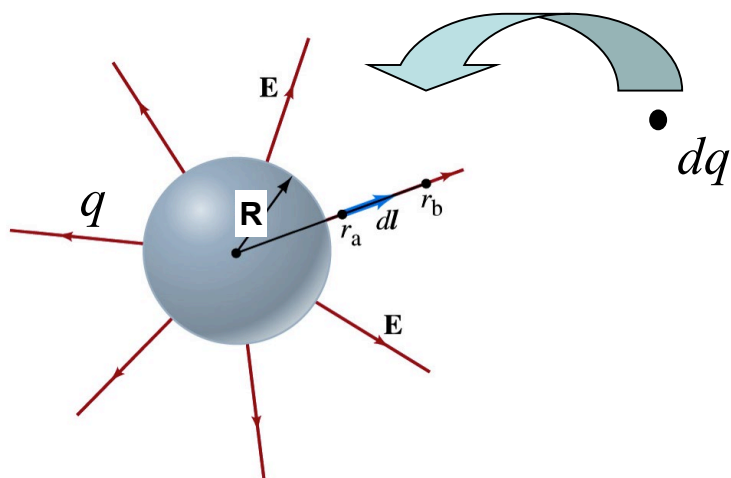
$$U_E > U_E^*$$

(car U_E^* n'inclut pas l'énergie impliquée dans la polarisation des molécules)

$$U_E - U_E^* = \frac{2\pi}{45\epsilon_0} \rho_f^2 R^5 (\epsilon_r - 1)$$

($U_E - U_E^*$ est l'énergie impliquée dans la polarisation des molécules)

3. Energie électrostatique d'une distribution de charges sur une sphère conductrice:



$$dW = dqV = dq \frac{q}{C} \Rightarrow \Delta W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = U_E$$

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}; \quad C = 4\pi\epsilon_0 R;$$

$$\Rightarrow U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

De la loi de Gauss:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} & (r > R) \end{cases} \Rightarrow$$

$$V(R) - V(\infty) = - \int_{\infty}^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\infty}^R E dr \Rightarrow V(R) - V(\infty) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

$$\text{Assuming } V(\infty) = 0 \Rightarrow V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

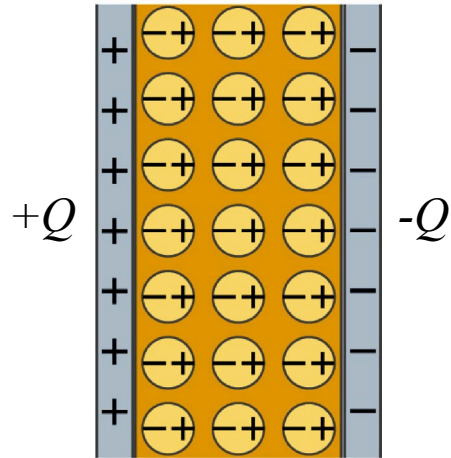
Plus rapidement:

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V |\mathbf{E}|^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_R^{\infty} \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0 r^2)^2} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

4. Energie électrostatique pour un système de conducteurs

$$U_E = W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} V_i V_j$$

5. Energie électrostatique dans un condensateur avec diélectrique



$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV$$

Dans le diélectrique (voir diapositives précédentes):

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \hat{\mathbf{x}} = \frac{Q}{A} \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \hat{\mathbf{x}}; \quad \mathbf{D} = \sigma \hat{\mathbf{x}} = \frac{Q}{A} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow U_E = \frac{1}{2} \int_V \frac{Q}{A} \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{Q}{A} dV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A^2} \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \int_V dV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A^2} \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} Ad = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A} \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} d$$

$$\Rightarrow U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A} \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} d$$

mais (voir diapositives précédentes):

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad \text{et} \quad Q = CV$$

$$\Rightarrow U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A} \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} d = \frac{1}{2} V^2 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV$$

Expressions équivalentes pour l'énergie électrostatique dans un condensateur.

6. Force sur chacune des deux plaques métalliques du condensateur

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A \varepsilon_0 \varepsilon_r} x = \frac{1}{2} V^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{x}$$

$\mathbf{F}_{me}$: Force que je dois appliquer à la plaque métallique

$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{me}$: Force sur la plaque métallique

Le condensateur est chargé et isolé ($Q = \text{const.}$):

$dU_E = F_{me} dx$ $F_{me} dx$: Travail que je dois faire pour déplacer la plaque métallique de dx ,

$$\Rightarrow F = -\frac{dU_E}{dx} \quad \Rightarrow$$

$$F = -\frac{d}{dx} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A \varepsilon_0 \varepsilon_r} x = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{A \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Le condensateur est connecté à une source de tension fixe ($V = \text{const.}$):

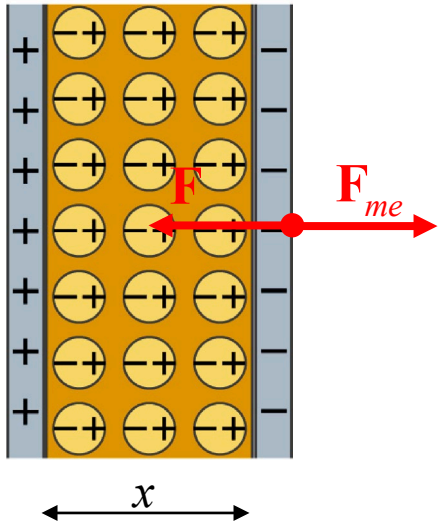
$dU_E = F_{me} dx + V dQ$ $F_{me} dx$: Travail que je dois faire pour déplacer la plaque métallique de dx ,

$V dQ$: Travail effectué par la source de tension

$$F = -\frac{d}{dx} \frac{1}{2} V^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{x} + V \frac{dQ}{dx} = \frac{1}{2} V^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{x^2} + V^2 \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} V^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{x^2} - V^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{x^2} = -\frac{1}{2} V^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{x^2} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{x^2} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{A \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

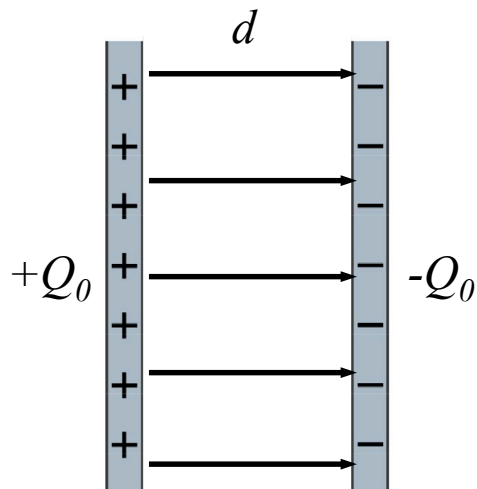
Donc:

- 1) La force exercée sur la plaque métallique ne dépend pas du fait que Q ou V est maintenu constant.
- 2) La force sur la plaque la plaque métallique est vers l'intérieur du condensateur (vers la direction x négative).



7. Différence d'énergie électrostatique dans un condensateur sans et avec diélectrique

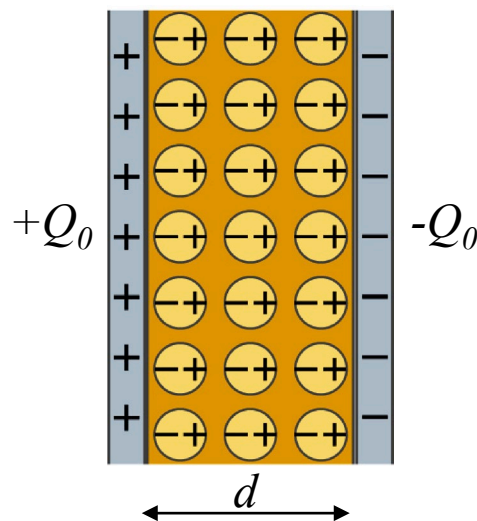
CAS 1: le condensateur est chargé et isolé ($Q_1 = Q_2 = \text{const.}$)



$$Q_0 = C_0 V_0 ; \quad C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$\Rightarrow U_{E,0} = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$

$$\Delta U_E = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_r} C_0 V_0^2 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)$$



$$Q_1 = C_1 V_1 = Q_0 ; \quad C_1 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = \epsilon_r C_0$$

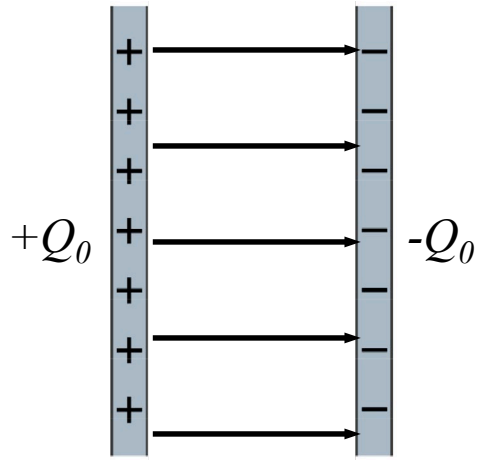
$$\Rightarrow U_{E,1} = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r C_0 \frac{Q_0^2}{C_1^2} = \frac{1}{2} \epsilon_r C_0 \frac{Q_0^2}{\epsilon_r^2 C_0^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_r} C_0 V_0^2$$

$$\Rightarrow U_{E,1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_r} C_0 V_0^2$$

Si $Q = \text{const.}$, l'énergie électrostatique dans le condensateur est **diminuée** avec l'introduction de la plaque diélectrique.

Le diélectrique subit une force vers l'intérieur du condensateur. Le travail est donc négatif. Ceci est cohérent avec le fait que l'énergie électrostatique dans le condensateur diminue.

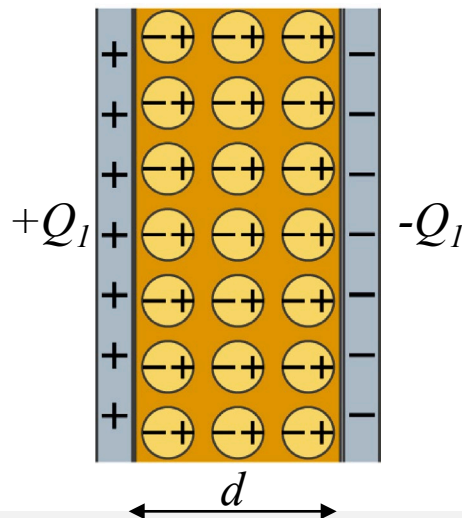
CAS 2: le condensateur est connecté à une source de tension fixe isolé ($V_0 = V_1 = \text{const.}$).



$$Q_0 = C_0 V_0 ; \quad C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$\Rightarrow U_{E,0} = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$

$$\Delta U_E = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 - \frac{1}{2} \epsilon_r C_0 V_0^2 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 (1 - \epsilon_r)$$



$$Q_1 = C_1 V_1 = C_1 V_0 ; \quad C_1 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = \epsilon_r C_0$$

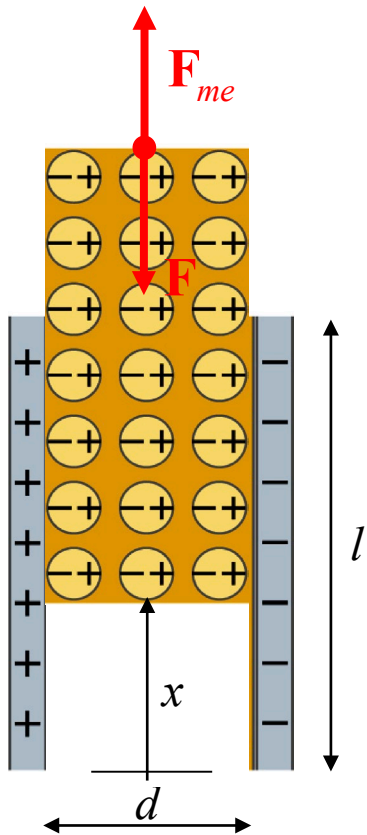
$$\Rightarrow U_{E,1} = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r C_0 V_0^2$$

Si $V = \text{const.}$, l'énergie électrostatique dans le condensateur est **augmentée** avec l'introduction de la plaque diélectrique.

Le diélectrique subit une force vers l'intérieur du condensateur. Le travail est donc négatif. Afin de maintenir une différence de potentiel constante, le générateur externe doit fournir des charges et donc effectuer un travail. Cela explique pourquoi l'énergie électrostatique dans le condensateur augmente même si le travail de la force externe est négatif.

8. Force sur le diélectrique dans un condensateur

CAS 1: le condensateur est chargé et isolé ($Q=\text{const.}$).



$\mathbf{F}_{me}$: Force que je dois appliquer à la plaque diélectrique

$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{me}$: Force sur la plaque diélectrique

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 w x}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r w (l-x)}{d} = \frac{\epsilon_0 w}{d} (x(1-\epsilon_r) + \epsilon_r l) \quad U_E(x) = \frac{1}{2} C(x) V(x)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q(x)^2}{C(x)}$$

Le condensateur est chargé et isolé ($Q = \text{const.}$):

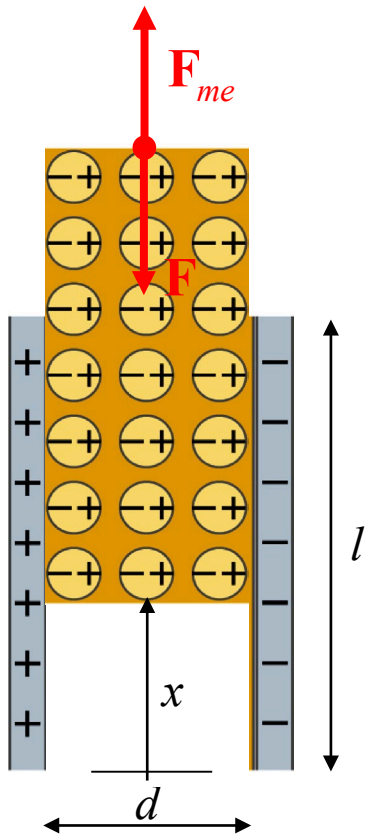
$dU_E = F_{me} dx$ $F_{me} dx$: Travail que je dois faire pour déplacer le diélectrique de dx ,

$$\Rightarrow F = -\frac{dU_E}{dx} \quad \Rightarrow$$

$$F = -\frac{d}{dx} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)^2} \frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC(x)}{dx} = -\frac{\epsilon_0 w}{2d} V^2 (1-\epsilon_r)$$

Surface de plaque métallique: $A = lw$

CAS 2: le condensateur est connecté à une source de tension fixe isolé ($V=\text{const.}$).



Surface de plaque métallique: $A = lw$

$\mathbf{F}_{me}$: Force que je dois appliquer à la plaque diélectrique

$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{me}$: Force sur la plaque diélectrique

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 wx}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r w(l-x)}{d} = \frac{\epsilon_0 w}{d} (x(1 - \epsilon_r) + \epsilon_r l) \quad U_E(x) = \frac{1}{2} C(x) V(x)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q(x)^2}{C(x)}$$

Le condensateur est connecté à une source de tension fixe ($V = \text{const.}$):

$dU_E = F_{me} dx + VdQ$ $F_{me} dx$: Travail que je dois faire pour déplacer le diélectrique de dx ,

VdQ : Travail effectué par la source de tension

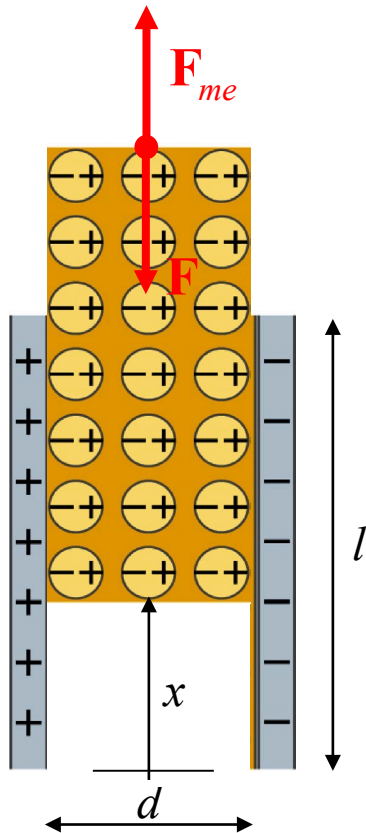
$$F = -\frac{dU_E}{dx} + V \frac{dQ}{dx} = -\frac{1}{2} V^2 \frac{dC(x)}{dx} + V^2 \frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC(x)}{dx} = -\frac{\epsilon_0 w}{2d} V^2 (1 - \epsilon_r)$$

Donc:

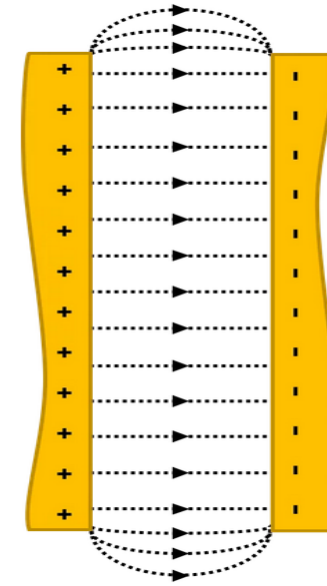
La force exercée sur le diélectrique ne dépend pas du fait que Q ou V est maintenu constant.

La force dans le deux cas est vers l'intérieur du condensateur (vers la direction x négative).

Note: Dans le cas réel, je dois également tenir compte de la force de gravité. La force totale que je dois appliquer est donc $\mathbf{F}_{me, \text{tot}} = \mathbf{F}_{me} + m\mathbf{g}$, où m est la masse de la plaque diélectrique.



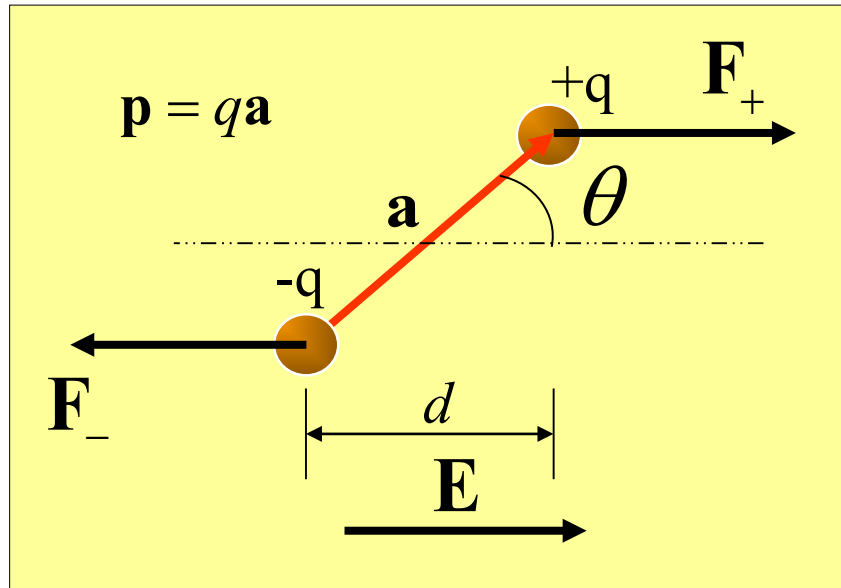
Note 1: Les matériaux **diélectriques** sont attirés par les champs électriques en raison de **l'orientation des dipôle électriques** (polarisation des molécules).
(Les matériaux **conducteurs** sont attirés par les champs électriques en raison de la **redistribution des charges**)



Note 2: Si le champ électrique était parfaitement homogène, il n'y aurait aucune force sur la plaque diélectrique. La force sur la plaque diélectrique est due au champ électrique non homogène situé dans la «fringing region» (i.e., le long des bords des plaques métalliques).

9. Energie potentielle d'un dipôle électrique dans un champ $\mathbf{E}$ uniforme

le couple tend à aligner
le dipôle avec le champ



Remarque:

L'énergie potentielle électrostatique $U_E = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ est l'énergie électrostatique d'un dipôle électrique $\mathbf{p}$ "indivisible" dans un champ électrique externe $\mathbf{E}$. (l'énergie potentielle électrostatique de la distribution de charge formée par la charge positive et négative du dipole est:

$$U_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \frac{q_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a})$$

$$U_E = qV_+ - qV_- = q(V_+ - V_-) = -qEd = -qEa \cos \theta = -pE \cos \theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

$$U_E = \int_{\pi/2}^{\theta} pE \sin \theta d\theta = pE (-\cos \theta) \Big|_{\pi/2}^{\theta} = -pE \cos \theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

$\Rightarrow$

$$U_E = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

le minimum d'énergie potentielle
est obtenu lorsque
le dipôle $\mathbf{p}$ est aligné avec le champ $\mathbf{E}$

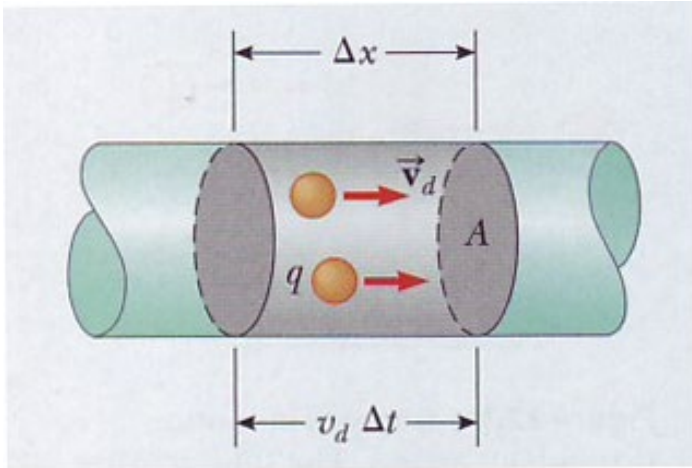
Courant électrique

Courant électrique: Flux de charge par unité de temps à travers une surface A

$$I \triangleq \frac{dQ}{dt} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{nq\Delta x A}{\Delta t} = (nqv_d)A = JA$$

ou (plus en générale):

$$I \triangleq \int_A nq\mathbf{v}_d \cdot d\mathbf{a} = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$



Charge de la particule "mobile":	q	[C]
Densité de particules chargées "mobile":	n	[1/m ³]
Densité de courant:	$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d$	[A/m ²]
Courant:	$I = JA$	[A]
Vitesse de "drift" des charges :	$\mathbf{v}_d$	[m/s]

Note 1:

$$\mathbf{J} \triangleq \frac{1}{dV} \left(\sum_{i(\text{charges libre})} q_i \mathbf{v}_i \right) = nq\mathbf{v}_d$$

nq : densité de charge "mobile"

ρ : densité de charge

En général: $\rho \neq nq$

Dans un conducteur métallique (e.g., Cu) neutre :

$$\rho = 0; \quad nq = ne \cong 10^{29} \text{ m}^{-3} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \cong 10^{10} \text{ C/m}^3$$

Note 2: 1 A = 1 C/s

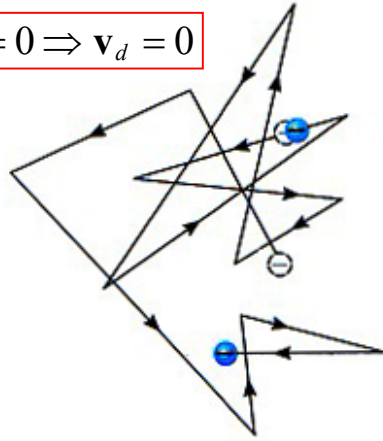
Charge de l'électron: $e \cong 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \Rightarrow$ un courant de 1 A est constitué de 6×10^{18} électrons/s à travers la surface A

Note 3: Conservation de la charge: $\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ Courant électrique stationnaire: $\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0$

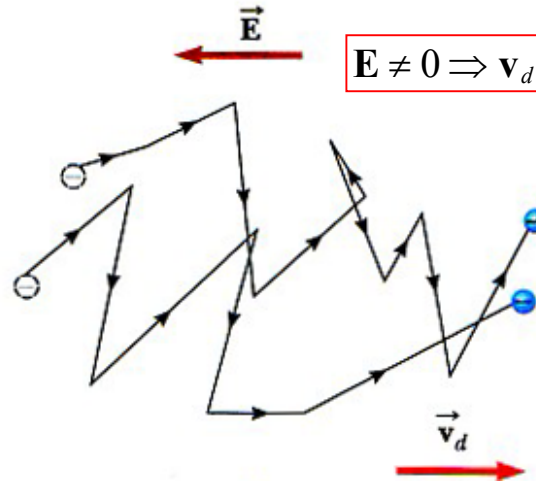
$\Rightarrow$ pour un courant électrique stationnaire $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$

La loi d'Ohm

$$\mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_d = 0$$



$$\mathbf{E} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{v}_d \neq 0$$



A cause des collisions avec les ions fixes, la vitesse des électrons libres dans un solide atteint une valeur limite $\mathbf{v}_d$ (vitesse de «drift») proportionnelle au champ électrique $\mathbf{E}$ (similaire au frottement visqueux).

Modèle de Drude:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{q}{m_e} \mathbf{E} \Rightarrow$$

Pour une seule charge entre deux collisions:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \frac{q}{m_e} \mathbf{E} t$$

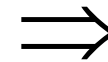
Pour un grand nombre de charges:

$$\langle \mathbf{v}(0) \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\langle \mathbf{v} \rangle \triangleq \mathbf{v}_d = \langle \mathbf{v}(0) \rangle + \frac{q\mathbf{E}}{m_e} \langle t \rangle \cong \frac{q}{m_e} E \tau$$

τ : temps moyen entre deux collisions

$\mathbf{v}_d$: vitesse de "drift" (vitesse effective dans la direction du champ $\mathbf{E}$)



$$\mathbf{v}_d = \frac{q}{m_e} \mathbf{E} \tau$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{J} \triangleq nq\mathbf{v}_d = \frac{nq^2\mathbf{E}}{m_e} \tau = \sigma \mathbf{E}$$

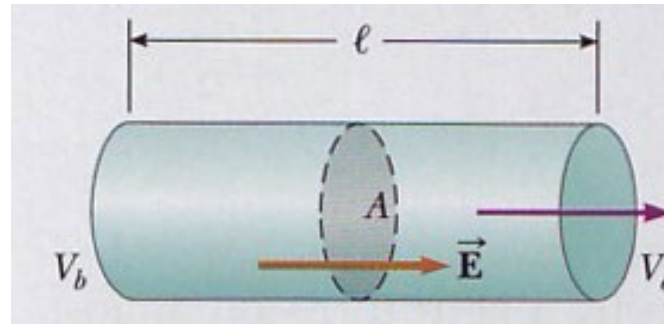
$\Rightarrow$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Loi de Ohm "locale"

Conductivité électrique [$1/\Omega\text{m} = \text{S/m}$]: $\sigma \equiv \frac{nq^2}{m_e} \tau$

Résistivité électrique [Ωm]: $\rho \equiv \frac{m_e}{nq^2 \tau}$



$$\mathbf{E} = -\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{Condition stationnaire: } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = E_0 \hat{\mathbf{x}} = \text{const}$$

$$\Rightarrow$$

$$\int_0^l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \Delta V \quad \int_0^l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_0 l$$

$$\Rightarrow$$

$$E_0 = \frac{\Delta V}{l}$$

$\mathbf{E}$ n'est pas nul dans le conducteur.
(courant stationnaire mais charges pas statiques...
donc la condition n'est pas «électrostatique»)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \sigma \frac{\Delta V}{l}$$

Loi d'Ohm "locale"

$$\Rightarrow$$

$$\Delta V = \frac{l}{\sigma} \mathbf{J} = \left(\frac{l}{\sigma A} \right) I = RI$$

$$\Rightarrow$$

$$\Delta V = RI$$

Loi d'Ohm "globale"

$$R \triangleq \left(\frac{l}{\sigma A} \right) = \rho \frac{l}{A}$$

Notes:

1. Problème de notation

Attention à la confusion entre: ρ (résistivité) et ρ (densité de charge dans un volume),
 σ (conductivité) et σ (densité de charge sur une surface)

2. Vitesse d'agitation thermique et temps moyen entre deux collisions :

$\langle \mathbf{v}(0) \rangle = 0$ mais $\langle v(0) \rangle \neq 0$ (agitation thermique des électrons)

$$\langle v(0) \rangle \cong v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} \cong 10^5 \text{ m/s} \quad (!!) \quad \text{pour } T \cong 300 \text{ K}$$

Le libre parcours moyen λ est un peu plus grand que la distance entre les atomes d_{atoms} .

Donc le temps entre les collisions est: $\tau \sim \frac{\lambda}{v_{th}} \sim \frac{10d_{atoms}}{v_{th}} \sim \frac{10^{-9} \text{ m}}{10^5 \text{ m/s}} \sim 10^{-14} \text{ s}$

3. Vitesse de drift:

Pour un fil de cuivre ($n \cong 8.5 \times 10^{28}$ électrons/m³) avec section $A=1 \text{ mm}^2$ avec un courant $I=10 \text{ A} \Rightarrow$

$$J = env_d = \frac{I}{A} = 10^7 \text{ A/m}^2 \quad \Rightarrow v_d = \frac{J}{en} \cong 1 \text{ mm/s} \quad (!!) \quad \Rightarrow v_d \ll v_{th} \quad (!!)$$

4. Champ $\mathbf{E} = 0$ ou $\mathbf{E} \neq 0$ dans un conducteur ?

$\mathbf{E} = 0$ pour un conducteur en conditions électrostatiques (charges statiques, donc pour $\mathbf{J}=0$).

Pour un conducteur parfait (avec $\sigma = \infty$), $\mathbf{E} = \mathbf{J} / \sigma = 0$ aussi pour $\mathbf{J} \neq 0$.

Pour un conducteur réel $\mathbf{E} = 0$ en conditions électrostatiques (charges statiques) mais $\mathbf{E} \neq 0$ pour $\mathbf{J} \neq 0$.

5. En présence d'un champ magnétique....

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \Rightarrow$$

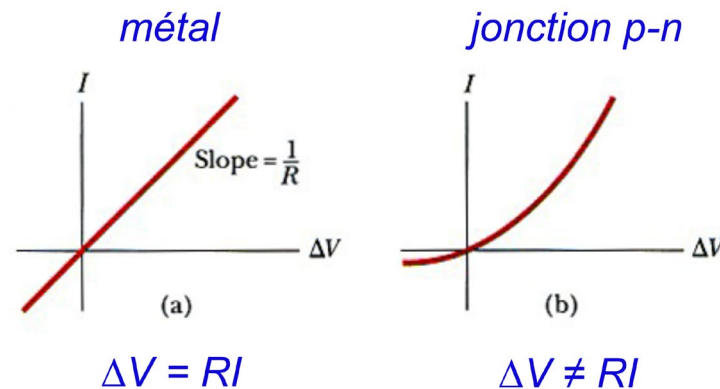
$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad \sigma \equiv \begin{pmatrix} 1/\sigma_0 & -\frac{1}{nq}B_z & \frac{1}{nq}B_y \\ \frac{1}{nq}B_z & 1/\sigma_0 & -\frac{1}{nq}B_x \\ -\frac{1}{nq}B_y & \frac{1}{nq}B_x & 1/\sigma_0 \end{pmatrix}^{-1} \quad \sigma_0 \equiv \frac{nq^2\tau}{m}$$

6. Phénoménologiquement, la densité de courant dans de nombreux systèmes obéit à la loi d'Ohm.

Mais la loi d'Ohm n'est pas une conséquence "mathématique" des équations de Maxwell et de la force de Lorentz.

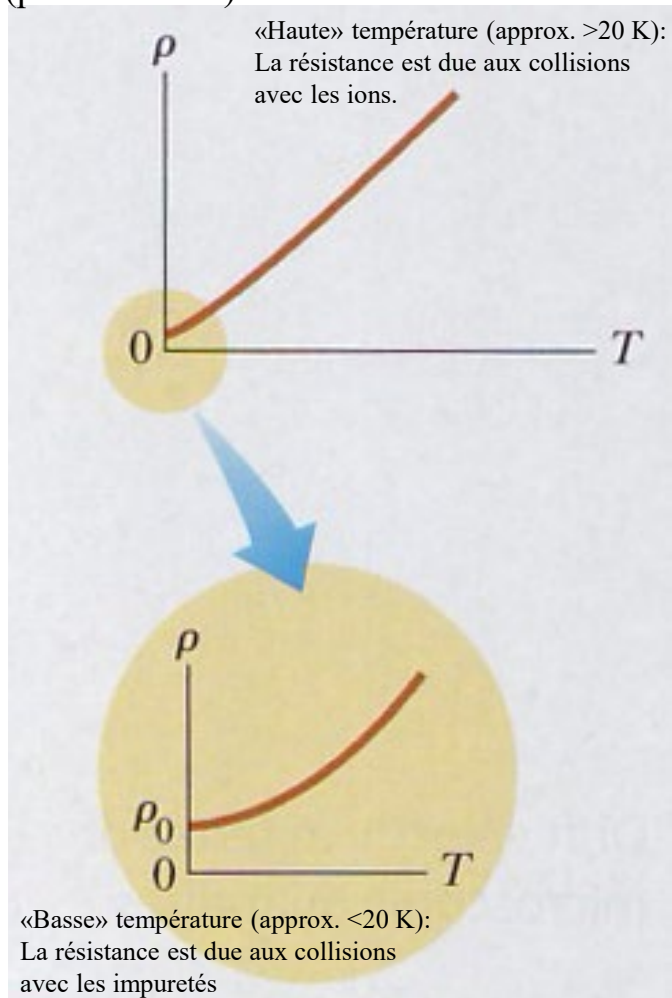
Dans un métal, la loi d'Ohm est généralement valide.

Dans un semi-conducteur tel que le Si avec un côté dopé avec B et un côté dopé avec P (jonction pn ou diode), la loi d'Ohm n'est pas valide.

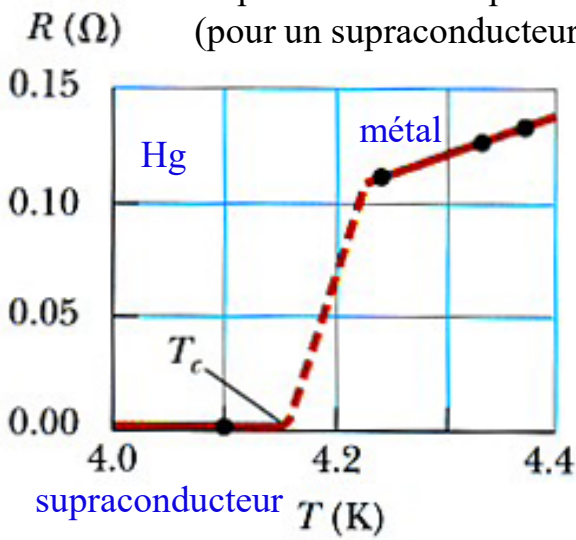


8. Résistance et résistivité pour les métaux et pour d'autres matériaux.

Dépendance en température de la résistivité
(pour un métal)



Dépendance en température de la résistance
(pour un supraconducteur-metal)



Résistivités, en ohms-mètres, à 293 K et 1 atm (G 297)

Material	Resistivity	Material	Resistivity
<i>Conductors:</i>		<i>Semiconductors:</i>	
Silver	1.59×10^{-8}	Sea water	0.2
Copper	1.68×10^{-8}	Germanium	0.46
Gold	2.21×10^{-8}	Diamond	2.7
Aluminum	2.65×10^{-8}	Silicon	2500
Iron	9.61×10^{-8}	<i>Insulators:</i>	
Mercury	9.61×10^{-7}	Water (pure)	8.3×10^3
Nichrome	1.08×10^{-6}	Glass	$10^9 - 10^{14}$
Manganese	1.44×10^{-6}	Rubber	$10^{13} - 10^{15}$
Graphite	1.6×10^{-5}	Teflon	$10^{22} - 10^{24}$

Les équations de Poisson et de Laplace

En statique: $\mathbf{E} = -\nabla V$

Equation de Maxwell: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$\Rightarrow$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V \Rightarrow \boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \text{Eq. de Poisson}$$

$$\text{Pour } \rho = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 V = 0} \quad \text{Eq. de Laplace}$$

Notes:

1. Lorsque la densité de charge est complètement spécifiée, le potentiel peut être obtenu par:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV$$

Dans cette condition, l'équation de Poisson ou de Laplace n'est pas nécessaire.

Cependant, de nombreux problèmes d'électrostatique impliquent une région finie de l'espace, avec ou sans charges à l'intérieur, avec **distribution des charges inconnue à priori** mais avec des conditions aux limites connues sur les surfaces de délimitation.

2. Conditions limites propres aux équations de Poisson et de Laplace pour définir un problème unique:

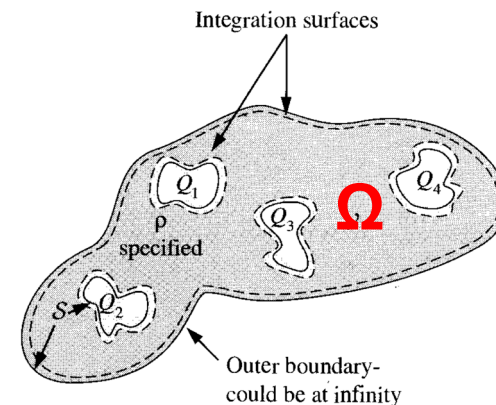
Condition de Dirichlet: Spécification du potentiel sur toute la surface fermée.

Condition de Neumann: Spécification du champ électrique sur toute la surface fermée.

Note: Théorèmes concernant les équations de Poisson et Laplace:

Soit un volume Ω (simplement ou multiplement connexe) et S sa surface.

1. Si le potentiel V est donné partout sur S , la solution $V(x,y,z)$ de l'équation de **Laplace** est unique en Ω .
2. Si le potentiel V est donné partout sur S et la densité de charge ρ est donnée partout dans Ω , la solution $V(x,y,z)$ de l'équation de **Poisson** est unique en Ω .
3. Dans un volume entouré de conducteurs et contenant une densité de charge spécifiée ρ , le champ électrique est déterminé de manière unique si la charge totale sur chaque conducteur est indiquée (la région dans son ensemble peut être délimitée par un autre conducteur ou non limitée).
4. Si la densité de charge est zéro dans Ω , $V(x,y,z)$ ne peut avoir ni des maxima ni des minima en Ω .
5. Si la densité de charge est zéro dans Ω , soit $P(x,y,z)$ un point de Ω , et Σ une sphère de rayon R de centre $P(x,y,z)$. Alors le potentiel $V(P)$ est égal à la moyenne de V sur la sphère.



Exemple d'application de l'eq. de Poisson: la charge image

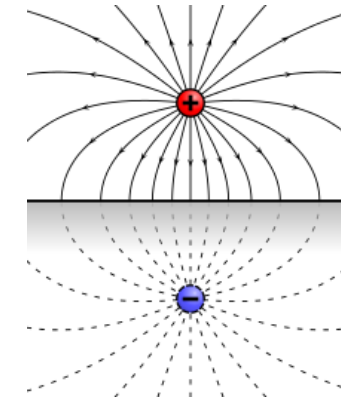
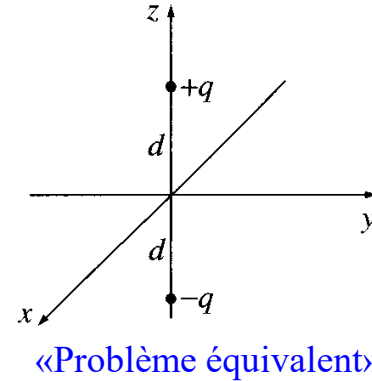
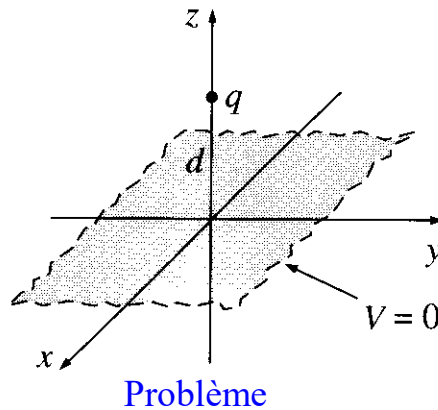
Problème 1: déterminer le potentiel (et le champ électrique) créé par une charge q au dessus d'un plan conducteur mis à la masse.

Solution: Les conditions aux limites sont:

- $V(x,y,0)=0$ sur le plan $z=0$.

- $V(x,y,z) \rightarrow 0$ loin de la charge q (i.e., pour $x^2+y^2+z^2 \gg d^2$)

La solution de l'éq. de Poisson est unique pour des conditions aux limites données. Nous pouvons donc étudier un «problème équivalent» (beaucoup plus simple !!) qui a les mêmes conditions aux limites:



$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_{tot}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} - \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right]$$

Note:

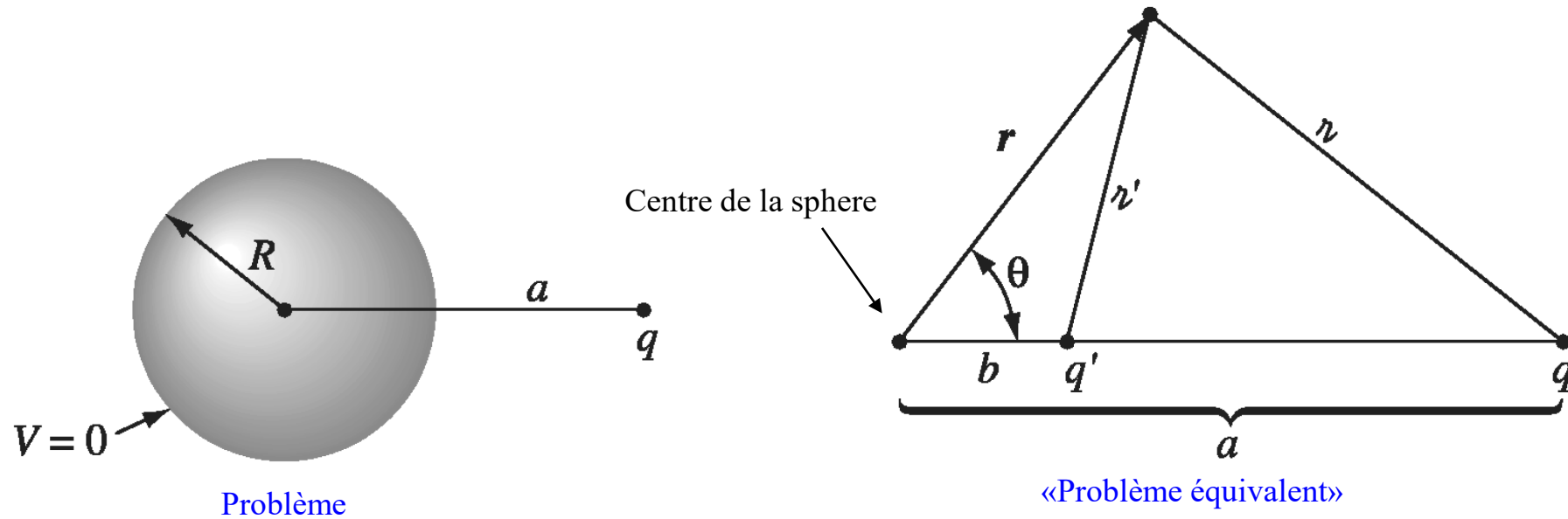
Force sur q (à partir de la charge image $-q$):

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d^2}$$

Force sur q (à partir du potentiel):

$$\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{z}} = qE(0,0,d)\hat{\mathbf{z}} = -q \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=d} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4d^2}$$

Problème 2: Une charge ponctuelle est située à une distance a du centre d'une sphère conductrice mise à la terre de rayon R . Trouvez le potentiel en dehors de la sphère.



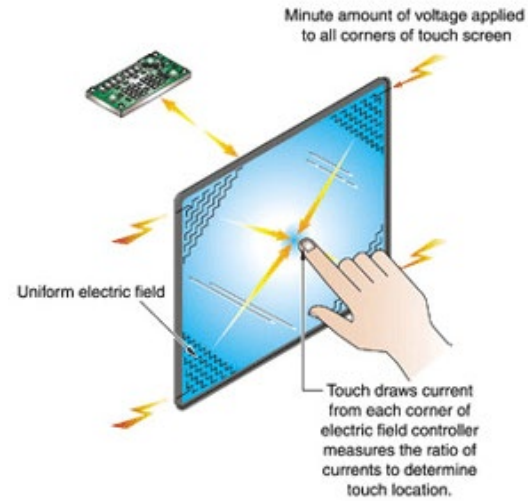
$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right)$$

$$\text{avec: } q' = -\frac{R}{a}q \quad b = \frac{R^2}{a}$$

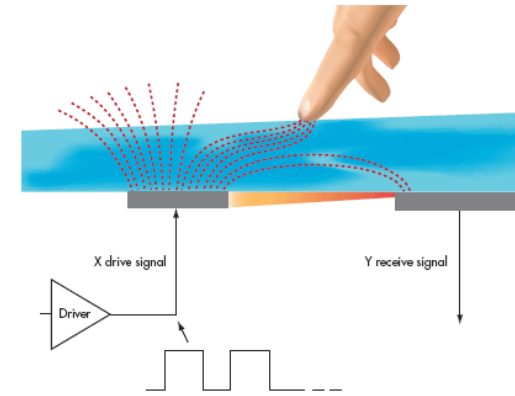
Note: La configuration «équivalente» est parfois très difficile à trouver....

Electrostatique et Microtechnique

Ecran tactile



3. One projected touchscreen technology involves sensing along both the X- and Y-axis using clearly etched ITO patterns.



«Moteurs» piézo-électriques pour positionnement micro/nanométrique (avec capteurs de position capacitif)

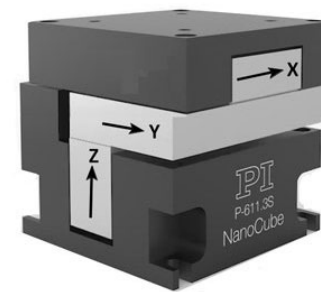
1-axis



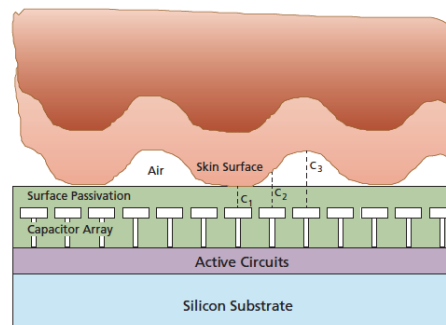
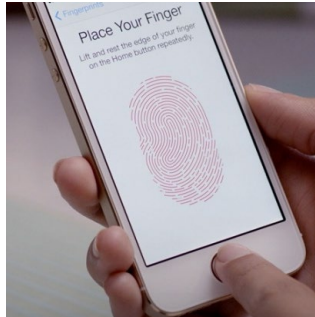
2-axis



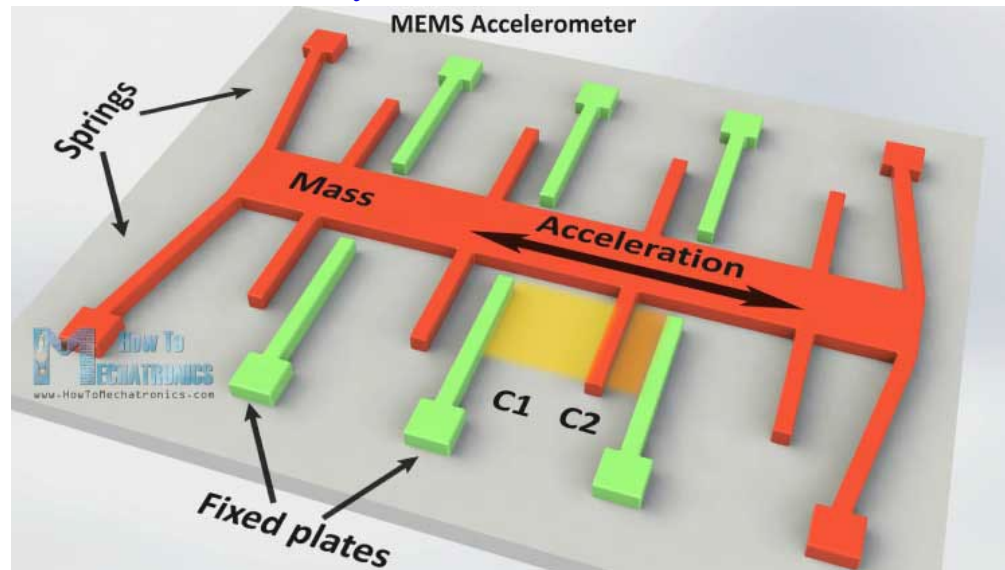
3-axis



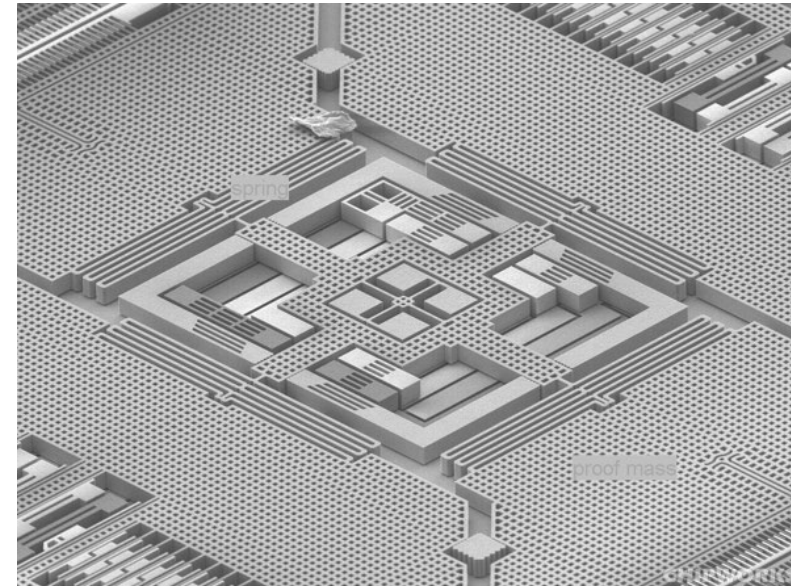
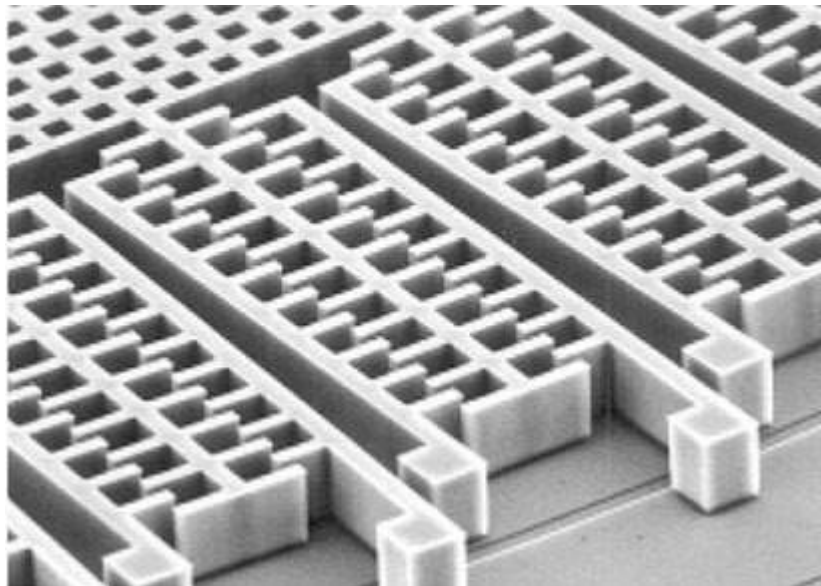
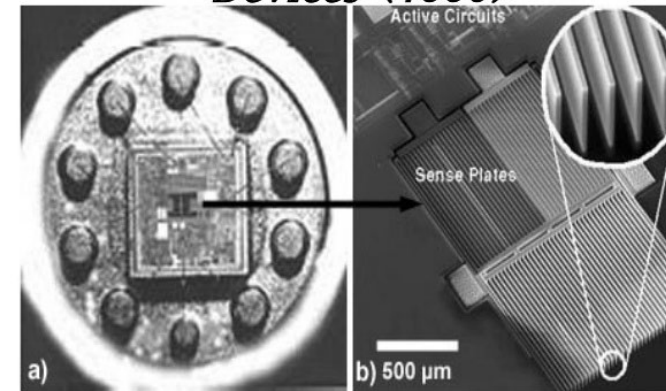
Capteur d'empreintes digitales



Accéléromètre et Gyromètre



The first commercial accelerometer from Analog Devices (1990)



Résumé de l'électrostatique

